Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{121, 90, 1; 1, 30, 121\}$

К.С. Ефимов[2]
konstantin.s.efimov@gmail.com

А.А. Махнев[1]
makhnev@imm.uran.ru

1 – ИММ УрО РАН (Екатеринбург)
2 – УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

А.А. Махнев и М.С. Самойленко выделили параметры сильно регулярных графов с не более чем 1000 вершинами, которые могут быть окрестностями вершин в антиподальном дистанционно регулярном графе диаметра 3 с $\lambda = \mu$. Ими же предложена программа исследования вершинно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в которых окрестности вершин сильно регулярны с вышеуказанными параметрами. В данной работе рассмотрен граф с массивом пересечений $\{121, 90, 1; 1, 30, 121\}$. Доказано, что вершинно симметричный граф с массивом пересечений $\{121, 90, 1; 1, 30, 121\}$ является реберно симметричным с цоколем группы автоморфизмов, изоморфным $Z_2 \times L_2(121)$.

1 Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Допустим, что Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в котором окрестности вершин сильно регулярны. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$ и спектр $k^1, \sqrt{k}^f, -1^k, -\sqrt{k}^f$, где $f = (k+1)(r-1)/2$. Далее, $(r-1)k' = v' - k' - 1$ и число $(v'+1)(r-1)$ четно. В случае $r = 2$ получим граф Тэйлора, в котором $k' = 2\mu'$. Обратно, для любого сильно регулярного графа с параметрами $(v', 2\mu', \lambda', \mu')$ найдется граф Тэйлора, в котором окрестности вершин сильно регулярны с соответствующими параметрами.

В [1] выделены параметры сильно регулярных графов с не более чем 1000 вершинами, которые могут быть окрестностями вершин в антиподальном дистанционно регулярном графе диаметра 3 с $\lambda = \mu$.

В рамках проекта РНФ 14-11-00061 продолжается программа исследования вершинно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из заключения предложения [1]. В данной работе рассмотрены параметры $(121, 30, 11, 6)$.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at http://ceur-ws.org

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(121,30,11,6)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω является пустым графом, $p=11$ и $\alpha_1(g)=0,121$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $n=1$, $p=5$, $\alpha_1(g)=55l+30$ или $p=3$, $\alpha_1(g)=33l-3$, либо $n=3t+1$, $1\leqslant t\leqslant 3$, $p=3$ и $\alpha_1(g)=33l-3-9t$, либо $n=2t+1$, $1\leqslant t\leqslant 5$, $p=2$ и $\alpha_1(g)=22l+8-6t$;*

(3) *Ω является m-кокликой, либо $m=3t+1$, $1\leqslant t\leqslant 3$, $p=3$ и $\alpha_1(g)=33l-9t-3$, либо $m=2t+1$, $1\leqslant t\leqslant 5$, $p=2$ и $\alpha_1(g)=22l+8-6t$;*

(4) *Ω содержит ребро и является объединением s изолированных клик и либо $p=3$, число вершин в максимальной клике из Ω сравнимо с 1 по модулю 3 и s сравнимо с 1 по модулю 3, либо $p=2$, число вершин в максимальной клике из Ω нечетно и s нечетно;*

(5) *если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины a, то $p\leqslant 3$, в случае $|\Omega|=31$ имеем $p=3$ и $\alpha_1(g)=33l-60$, $2\leqslant l\leqslant 4$;*

(6) *Ω содержит геодезический путь, $p\leqslant 7$ и в случае $p=7$ подграф Ω сильно регулярен с параметрами $(16,9,4,6)$.*

Теорема 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{121,90,1;1,30,121\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,13,23,61\}$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то $p\in\{2,61\}$;*

(2) *если Ω — антиподальный класс, то $p=11$;*

(3) *если Ω — клика, то $p=3$ и $t=2,5,8,11$;*

(4) *если $p\geqslant 11$, то либо $p=23$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{29,21,1;1,7,29\}$, либо $p=13$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{17,12,1;1,4,17\}$;*

(5) *если $p=7$, то $t=10,17,24$ и в случае $t=10$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{9,6,1;1,2,9\}$;*

(6) *если $p=5$, то $t=2,7,12,17,22,27$ и в случае $t=7$ подграф Ω является объединением четырех изолированных 7-клик;*

(7) *если $p=3,s=4$, то $t=3l+2$, $l\leqslant 9$ и в случае $t=5$ подграф Ω является объединением четырех изолированных 5-клик;*

(8) *если $p=2,s>0$, то каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω и либо $s=2$, $t\leqslant 60$, либо $s=4$, $t\leqslant 30$.*

Следствие. *Вершинно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{121,90,1;1,30,121\}$ является реберно симметричным графом с группой автоморфизмов, имеющей цоколь $Z_2\times L_2(121)$.*

Заметим, что ввиду границы Дельсарта [2, предложение 4.4.6] максимальный порядок клики в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{121,90,1;1,30,121\}$ и спектром $121^1,11^{305},-1^{121},-11^{305}$ не больше $1-k/\theta_d=1+121/11=12$. Если C является 12-кликой из Γ, то каждая вершина вне C смежна с 0 или с $b_1/(\theta_d+1)+1-k/\theta_d=-9+12=3$ вершинами из C.

2 Автоморфизмы графа с параметрами $(121,30,11,6)$

В этом параграфе Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(121,30,11,6)$ (псевдогеометрический граф для сети $pG_2(10,2)$) и спектром $30^1,8^{30},-3^{90}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$.

Ввиду границ Хофмана, порядок коклики в Γ не больше $vm/(k+m)=121\cdot 3/33=11$, порядок клики C в Γ не больше $1+k/m=11$ и в случае $|C|=11$ каждая вершина из $\Gamma-C$ смежна точно с 2 вершинами из C.

Лемма 1. *Пусть ψ — мономиальное представление группы G в $GL(121,\mathbf{C})$, χ_1 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 30, отвечающих собственному значению 8. Тогда $\chi_1(g)=(3\alpha_0(g)+\alpha_1(g))/11-3$ и $\chi_1(g)-30$ делится на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 8 & -3 \\ 90 & -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (30\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - 3\alpha_2(g))/121$. Подставляя $\alpha_2(g) = 121 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (3\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/11 - 3$.

Последнее утверждение леммы следует из [3, лемма 1].

Лемма 2. *Пусть A — трехвершинный подграф из Γ, y_i — число вершин из $\Gamma - A$, смежных точно с i вершинами из A. Если A — коклика, то $y_0 = 46 - y_3$, если A — объединение изолированной вершины и ребра, то $y_0 = 53 - y_3$, если A — геодезический путь, то $y_0 = 59 - y_3$, а если A — клика, то $y_0 = 64 - y_3$.*

Доказательство. Пусть A — коклика. Тогда $y_1 = 54 + 3y_3$, $y_2 = 18 - 3y_3$ и $y_0 = 46 - y_3$. Пусть A — клика. Тогда $y_1 = 24 + 3y_3$, $y_2 = 30 - 3y_3$ и $y_0 = 64 - y_3$. Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *Γ не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами $(v', k', 11, 6)$;*

(2) *если Ω является пустым графом, то $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 0, 121$;*

(3) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 55l + 30$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 33l - 3$, либо $n = 3t + 1$, $1 \leqslant t \leqslant 3$, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 33l - 3 - 9t$, либо $n = 2t + 1$, $1 \leqslant t \leqslant 5$, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 22l + 8 - 6t$;*

(4) *если Ω является m-кокликой, либо $m = 3t+1$, $1 \leqslant t \leqslant 3$, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 33l - 9t - 3$, либо $m = 2t+1$, $1 \leqslant t \leqslant 5$, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 22l + 8 - 6t$;*

(5) *если Ω содержит ребро и является объединением s изолированных клик, то либо $p = 3$, число вершин в максимальной клике из Ω сравнимо с 1 по модулю 3 и s сравнимо с 1 по модулю 3, либо $p = 2$, число вершин в максимальной клике из Ω нечетно и s нечетно.*

Доказательство. Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 11, 6)$. Тогда $n^2 = 4(k' - 6) + 25$, поэтому $n = 2u + 1$ и $k' = u^2 + u$. Далее, Δ имеет неглавные собственные значения $u + 3, 2 - u$ и кратность $u + 3$ равна $(u - 1)(u^2 + u)(u^2 + 2u - 2)/(6(2u + 1))$. При $u = 4$ получим $3 \cdot 20 \cdot 22/54$, а при $u = 3$ граф Δ является полным многодольным. В любом случае имеем противоречие.

Пусть Ω является пустым графом. Тогда $p = 11$, $\chi_1(g) = \alpha_1(g))/11 - 3$ и $\chi_1(g) - 30$ делится на 11. Поэтому $\alpha_1(g)$ равно 0 или 121.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 30 и $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 30)/11$. В случае $p = 5$ число $\chi_1(g)$ делится на 5, поэтому $\alpha_1(g) = 55l + 30$. В случае $p = 3$ число $\chi_1(g)$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 33l - 3$. В случае $p = 2$ имеем $\alpha_1(g) = 0$ и $\chi_1(g) = -3$ и $\chi_1(g) - 30$ не делится на 2, противоречие.

Если $n > 1$, то p делит 18 и $13 - n$. В случае $p = 3$ имеем $n = 3t+1$, $t \leqslant 3$, число $\chi_1(g) = (9t - 30 + \alpha_1(g))/11$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 33l - 3 - 9t$. В случае $p = 2$ имеем $n = 2t+1$, $t \leqslant 5$, число $\chi_1(g) = (6t - 30 + \alpha_1(g))/11$ четно и $\alpha_1(g) = 22l + 8 - 6t$. В случае $t = 5$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, поэтому $\alpha_1(g) = 22(l - 1) = 0$.

Пусть Ω является m-кокликой, $m > 1$. Тогда p делит 6 и $67 - m$. В случае $p = 3$ число $\chi_1(g)$ делится на 3, $m = 3t + 1$, $t \leqslant 3$, $\chi_1(g) = (9t + 3 + \alpha_1(g))/11 - 3$ и $\alpha_1(g) = 33l - 9t - 3$. В случае $p = 2$ число $\chi_1(g)$ четно, $m = 2t + 1$, $t \leqslant 5$, $\chi_1(g) = (6t + 3 + \alpha_1(g))/11 - 3$ и $\alpha_1(g) = 22l + 8 - 6t$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением s изолированных клик. Тогда p делит 6 и 18. В случае $p = 3$ число вершин в максимальной клике из Ω сравнимо с 1 по модулю 3 и s сравнимо с 1 по модулю 3. В случае $p = 2$ число вершин в максимальной клике из Ω нечетно и s нечетно.

Лемма 4. *Пусть Ω содержит геодезический путь b, a, c. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$p \leqslant 11$ и если $\alpha_2(g) = 0$, то либо $p = 7$, $\alpha_0(g) = 44$, либо $p = 5$, $\alpha_0(g) = 11$, либо $p = 3$, $\alpha_0(g) = 22, 55$, либо $p = 2$, $\alpha_0(g) = 11, 33, 55$;*

(2) *если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины a, то $p \leqslant 3$, в случае $|\Omega| = 31$ имеем $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 33l - 60$, $2 \leqslant l \leqslant 4$.*

Доказательство. Пусть $p \geqslant 13$. Тогда Ω – сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 11, 6)$, противоречие.

Если $\alpha_2(g) = 0$, то $\chi_1(g) = 8 + 2\alpha_0(g)/11$, причем $\chi_1(g) - 30$ делится на p, поэтому $2\alpha_0(g)/11 - 22$ делится на p. Отсюда $\alpha_0(g) = 11w$, p делит $2(11 - w)$ и либо $p = 11$, $\alpha_0(g) = 121$, противоречие, либо $p = 7$, $\alpha_0(g) = 44$, либо $p = 5$, $\alpha_0(g) = 11$, либо $p = 3$, $\alpha_0(g) = 22, 55$, либо $p = 2$, $\alpha_0(g) = 11, 33, 55$.

Пусть Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины a. Тогда $[u]\cap\Omega$ содержит 6 вершин из Ω для любой вершины $u\in\Gamma-\Omega$. Отсюда любая $\langle g\rangle$-орбита длины p не содержит геодезических 2-путей, в частности она является кликой или кокликой.

Если $p\geqslant 7$, то $[u]\cap\Omega$ является 6-кликой и для двух вершин $b,c\in[u]\cap\Omega$ подграф $[b]\cap[c]$ содержит a, 4 вершины из $[u]\cap\Omega$ и p верщин из $\langle g\rangle$-орбиты, содержащей u, противоречие.

В случае $p=5$ подграф $[u]\cap\Omega$ является кликой, иначе для двух несмежных вершин $b,c\in[u]\cap\Omega$ подграф $[b]\cap[c]$ содержит a и 5 верщин из $\langle g\rangle$-орбиты Δ, содержащей u. В этом случае $[u]\cap\Omega$ является кокликой, противоречие с тем, что $\cup_{b\in[u]\cap\Omega}([a]\cap[b])$ содержит не менее 55 вершин. Если Δ – клика, то $\Delta\cup(\Omega\cap[u])$ является 11-кликой, противоречие с тем, что a смежна с 6 вершинами этой клики. Значит, Δ – коклика, противоречие с тем, что $\cup_{u\in\Delta}([u]-[a])$ содержит не менее 120 вершин. Итак, $p\leqslant 3$.

Если $|\Omega|=31$, то $\chi_1(g)=(60+\alpha_1(g))/11$ и $\chi_1(g)-30$ делится на p. В случае $p=3$ имеем $\alpha_1(g)=33l-60$, $2\leqslant l\leqslant 4$. В случае $p=2$ имеем $\alpha_1(g)=22l-60$, для вершины u, смежной с u^g, подграф $[u]$ содержит нечетное число вершин из $\Omega-[a]$, противоречие.

Лемма 5. *Пусть Ω содержит геодезический путь b,a,c. Тогда $p\leqslant 7$ и в случае $p=7$ подграф Ω сильно регулярен с параметрами* $(16,9,4,6)$.

Доказательство. Пусть $p=11$. Тогда $\mu_\Omega=6$ и для смежных вершин $a,b\in\Omega$ подграф $\Omega(a)\cap[b]$ содержит 0 или 11 вершин. Далее, $|\Omega|=11t$, $t\leqslant 5$, и степень вершины в Ω равна $8,19$.

Если a – вершина степени 8 в Ω, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $6(11t-9)=18e+7(8-e)$, поэтому $6t=10+e$ и либо $t=2=e$, либо $t=3,e=8$. В любом случае имеем противоречие с тем, что для двух вершин b,c из $\Omega(a)$, смежных с 18 вершинами из $\Omega_2(a)$, подграф $[b]\cap[c]$ содержит не менее 12 вершин из $\Omega_2(a)$. Итак, Ω – регулярный граф степени 19 на 44 вершинах. Теперь число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $6\cdot 24=18e+7(19-e)$, поэтому $e=1$. Для вершины b из $\Omega(a)$, смежной с 18 вершинами из $\Omega_2(a)$, и вершины c из $\Omega-(a^\perp\cup b^\perp)$ подграф $[c]$ содержит не более 12 вершин из $a^\perp\cup b^\perp$ и не более 5 вершин из $\Omega-(a^\perp\cup b^\perp)$, противоречие.

Пусть $p=7$. Тогда $\mu_\Omega=6$ и для смежных вершин $a,b\in\Omega$ подграф $\Omega(a)\cap[b]$ содержит 4 или 11 вершин. Далее, $|\Omega|=7t+2$, $t\leqslant 8$, и степень вершины в Ω равна $9,16,23$. В случае $|\Omega|=58$ ввиду леммы 2 каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 7 является кликой, $\alpha_2(g)=0$, противоречие с леммой 4. В случае $|\Omega|=51$ имеем $\chi_1(g)=(153+\alpha_1(g))/11-3$ и $\alpha_1(g)=56$. Далее, ввиду леммы 2 степень вершины в $\langle g\rangle$-орбите Σ длины 7 равна 4 или 6. Если степень вершины u в Σ равна 4, то Σ содержит трехвершинный подграф Σ_0, являющийся объединением изолированной вершины и ребра, причем Σ_0 попадает в окрестности двух вершин из Σ. Таким образом, имеется восемь кликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 7 и две $\langle g\rangle$-орбиты степени 4. Вершина u из кликовой $\langle g\rangle$-орбиты Φ длины 7 смежна не более чем с 5 вершинами из Ω, иначе $\Phi\cup(\Omega\cap[u])$ является 13-кликой, противоречие. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$, деленное на 7, не больше $5\cdot 8+2\cdot 3=46$.

Если a – вершина степени 9 в Ω, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $6(7t-8)=18e+11m+4(9-m-e)$, поэтому $6t=12+m+2e$, $t\leqslant 5$. В случае $t=2$ имеем $m=e=0$ и Ω – сильно регулярный граф с параметрами (16,9,4,6). В случае $t=3$ имеем $m=6,e=0$ и множество Σ вершин из $\Omega(a)$, смежных с 11 вершинами из $\Omega_2(a)$, индуцирует клику. Противоречие с тем, что для двух вершин $b,c\in\Sigma$ подграф $[b]\cap[c]$ содержит 4 вершины из Σ и не менее 9 вершин из $\Omega_2(a)$. В случае $t=4$ имеем $m+2e=12$ и $e\leqslant 1$, противоречие. В случае $t=5$ имеем $e=9$ и для двух несмежных вершин b,c из $\Omega(a)$ подграф $[b]\cap[c]$ содержит a и не менее 9 вершин из $\Omega_2(a)$, противоречие.

Итак, в Ω нет вершин степени 9. Если a,b – две вершины степени 23 в Ω, то либо a,b не смежны и Ω содержит a,b, 6 вершин из $[a]\cap[b]$, по 17 вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и еще $7t-40$ вершин, либо a,b смежны и Ω содержит a,b, δ вершин из $[a]\cap[b]$, по $22-\delta$ вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и еще $7t+\delta-44$ вершин. Отсюда $t\geqslant 6$.

Пусть z — число вершин степени 16 в Ω. Тогда число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$, деленное на 7, равно $2z+(|\Omega|-z)$. В случае $|\Omega|=51$ указанное число ребер не больше 46, противоречие. Итак, $t=6$ и для двух несмежных вершин a,b степени 23 в Ω подграф Ω содержит a,b, 6 вершин из $[a]\cap[b]$, по 17 вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и 2 вершины вне $a^\perp\cup b^\perp$. Противоречие с тем, что степень вершины c из $\Omega-(a^\perp\cup b^\perp)$ в графе Ω не больше 1+12. Значит, подграф Ψ на множестве вершин степени 23 в Ω является кликой. Теперь для двух вершин $a,b\in\Psi$ подграф Ω содержит a,b, 11 вершин из $[a]\cap[b]$, по 11 вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и 9 вершин вне $a^\perp\cup b^\perp$.

Если $a\in\Psi$, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $120=11m+4(23-m)$, поэтому $m=4$ и $|\Psi|=2,4$. Заметим, что вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна не более чем с 6 вершинами из Ω, поэтому число ребер между Ω и

$\Gamma-\Omega$, деленное на 7, не больше 66. С другой стороны, это число не меньше $40\cdot 2+4$, противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 3–5 следует теорема 1.

3 Автоморфизмы графа с параметрами $(121, 30, 11, 6)$

В этом параграфе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{121, 90, 1; 1, 30, 121\}$ и спектром $121^1, 11^{183}, -1^{121}, -11^{183}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам.

Пусть F — антиподальный класс, содержащий вершину $a \in \Omega$, $F \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$, $b \in \Omega(a)$. Через $F(x)$ будем обозначать антиподальный класс, содержащий вершину x.

Лемма 6. *Если ψ — мономиальное представление группы G в $GL(488, \mathbf{C})$, χ_1 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 183, отвечающих собственному значению 11, χ_2 — характер проекции ψ на подпространство размерности 121, то $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g)+2\alpha_1(g)-5\alpha_3(g))/44-61/11$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1$. Далее, $\chi_1(g) - 183$ и $\chi_2(g) - 121$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 183 & 183/11 & -61/11 & -61 \\ 121 & -1 & -1 & 121 \\ 183 & -183/11 & 61/11 & -61 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (3\alpha_0(g)+3\alpha_1(g)/11-\alpha_2(g)/11-\alpha_3(g))/8$. Подставляя $\alpha_2(g) = 488-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - 5\alpha_3(g))/44 - 61/11$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (121\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 121\alpha_3(g))/488$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 488 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из [3, лемма 1]. Лемма доказана.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 61$, $\alpha_1(g) = 122$ и $\alpha_2(g) = 366$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 8l$, $\alpha_1(g) = 20l + 12 + 44m$ и $\alpha_2(g) = 476 - 28l - 44m$, $l \leqslant 61$ и $7l + 11m \leqslant 119$;*

(2) *если Ω — антиподальный класс, то $p = 11$, $\alpha_1(g) = 22l$;*

(3) *если Ω — клика, то $p = 3$, $t = 2, 5, 8, 11$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$. Так как $v = 61 \cdot 8$, то $p \in \{2, 61\}$.

Пусть $p = 61$. Тогда $\alpha_3(g) = 0$ и $\chi_1(g) = 61(w_1 - 2)/22$. Отсюда $w_1 = 22l + 2$, $\alpha_1(g) = 122$ и $\alpha_2(g) = 366$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/4 - 1$, $\alpha_3(g) = 8l$ и число $\chi_1(g) = (w_1 - 10l - 61)/11$ нечетно. Поэтому $w_1 = 10l + 6 + 22m$ и $\alpha_1(g) = 20l + 12 + 44m$ и $\alpha_2(g) = 476 - 28l - 44m$. В случае $\alpha_3(g) = 488$ имеем $\chi_1(g) = -61$.

Пусть Ω — антиподальный класс. Тогда p делит 121, поэтому $p = 11$. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 88)/22$ и $\alpha_1(g) = 22l$.

Если Ω — клика, то $p = 3$ делит $122 - t$, поэтому $t = 2, 5, 8, 11$. Лемма доказана.

В леммах 8–9 предполагается, что $t > 1, s > 1$.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $p \geqslant 11$, то либо $p = 23$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{29, 21, 1; 1, 7, 29\}$, либо $p = 13$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{17, 12, 1; 1, 4, 17\}$;*

(2) *если $p = 7$, то $t = 10, 17, 24$ и в случае $t = 10$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;*

(3) *если $p = 5$, то $t = 2, 7, 12, 17, 22, 27$ и в случае $t = 7$ подграф Ω является объединением четырех изолированных 7-клик;*

(4) *если $p = 3$, то $t = 3l + 2$, $l \leqslant 9$ и в случае $t = 5$ подграф Ω является объединением четырех изолированных 5-клик.*

Доказательство. Если $s = 4$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω.

Пусть $p > 3$, $\alpha_1(g) = pw_1$. Тогда $s = 4$, $\alpha_3(g) = 0$, $|\Omega| = 4t$, Ω — регулярный граф степени $t-1$ и p делит $122 - t$.

Если $p > 29$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t-1, t-32, 1; 1, 30, t-1\}$, противоречие.

Пусть $p = 29$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 6$, подграф $\Omega(b)$ содержит 2 вершины из $a^\perp$ и по вершине из $[a_2], ..., [a_4]$. Отсюда Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{5, 3, 1; 1, 1, 5\}$, противоречие.

Пусть $p = 23$. Так как p делит $122-t$, то $t = 7, 30$, подграф $\Omega(b)$ содержит 8 вершины из $a^\perp$ и по 7 вершин из $[a_2], ..., [a_4]$. Отсюда Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{29, 21, 1; 1, 7, 29\}$.

Пусть $p = 19$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 8, 27$, подграф $\Omega(b)$ содержит 12 вершин из $a^\perp$ и по 11 вершин из $[a_2], ..., [a_4]$, противоречие.

Пусть $p = 17$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 3, 20$, подграф $\Omega(b)$ содержит 14 вершин из $a^\perp$ и по 13 вершин из $[a_2], ..., [a_4]$, противоречие.

Пусть $p = 13$. Так как p делит $122-t$, то $t = 5, 18$, подграф $\Omega(b)$ содержит 5 вершин из $a^\perp$ и по 4 вершины из $[a_2], ..., [a_4]$. Отсюда Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{17, 12, 1; 1, 4, 17\}$.

Пусть $p = 11$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 12, 23$, подграф $\Omega(b)$ содержит 9 вершин из $a^\perp$ и по 8 вершин из $[a_2], ..., [a_4]$, противоречие.

Пусть $p = 7$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 3, 10, 17, 24$, подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a^\perp$ и по 2 вершины из $[a_2], ..., [a_4]$, поэтому в случае $t = 10$ подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$.

Пусть $p = 5$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 2, 7, 12, 17, 22, 27$. В случае $t = 7$ подграф Ω является объединением изолированных 7-клик и, быть может, графа Δ без треугольников. Пусть $\Delta(a) = \{b_1, ..., b_6\}$. Без ограничения общности, $\Delta(b_i)$ содержит 5 вершин из $[a_{i+1}]$. Противоречие с тем, что вершина из $\Delta(b_1) \cap [a_2]$ должна быть смежна с 5 вершинами из $\Delta(a)$.

Пусть $p = 3$. Тогда $s = 4$ и $\alpha_3(g) = 0$. Так как 3 делит $122 - t$, то $t = 3l + 2$, $l \leqslant 9$.

В случае $t = 5$ подграф Ω является объединением изолированных 5-клик и, быть может, графа Δ без треугольников. Пусть $\Delta(a) = \{b_1, ..., b_4\}$. Без ограничения общности, $\Delta(b_i)$ содержит 3 вершины из $[a_{i+1}]$. Противоречие с тем, что вершина из $\Delta(b_1) \cap [a_2]$ должна быть смежна с 3 вершинами из $\Delta(a)$.

Лемма 9. *Если $p = 2$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω и либо $s = 2$, $t \leqslant 60$, либо $s = 4$, $t \leqslant 30$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда $s \in \{2, 4\}$ и t четно. Заметим, что для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ имеем $|\Omega(a) \cap [b]| \in \{0, 2, ..., 30\}$, любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω.

Так как $\alpha_3(g) = t(4 - s)$, то $\chi_2(g) = t - 1$, t четно, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 488 - 4t$, число $\chi_1(g) = (17st + 2\alpha_1(g) - 5t(4 - s))/44 - 61/11 = ((11st + \alpha_1(g))/2 - 5t - 61)/11$ нечетно.

Если $s = 2$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $2t(122 - t)$, но не больше $120(122 - t)$, поэтому $t \leqslant 60$.
Если $s = 4$, то $t \leqslant 30$. Лемма доказана.

Из лемм 7–9 следует теорема 2.

4 Вершинно симметричный случай

Пусть группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для антиподального класса F, содержащего вершину $a \in \Gamma$, подгруппа $H = G_{\{F\}}$ имеет индекс 122 в G и $|H : H_a| = 4$. Из теоремы 2 следует, что $\{2, 61\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 61\}$ и $|G|$ не делится на 13^2 и на 11^3.

Лемма 10. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) *если f — элемент порядка 61 из G, g — элемент простого порядка $p \neq 61$ из $C_G(f)$, то $p = 2$ и $\alpha_3(g) = 488$;*
(2) *$S(G) = O_2(G)$ и $|O_2(G)|$ делит 4;*
(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфен $L_2(121)$.*

Доказательство. Допустим, что g — элемент простого порядка $p \neq 61$ из $C_G(f)$. Так как f действует без неподвижных точек на Ω, то, ввиду теоремы 2, Ω — пустой граф, $\alpha_1(f) = 122$, $p = 2$ и числа $\alpha_3(g) = 8l$, $\alpha_1(g) = 20l + 12 + 44m$, $\alpha_2(g) = 476 - 28l - 44m$ делятся на 61. Если $l = 0$, то $3 + 11m$ делится на 61, противоречие. Значит, $l = 61$.

Заметим, что $2^{36}-1$ не делится на 61.

Пусть $Q = O_2(G) \neq 1$. Тогда порядки Q-орбит на множестве антиподальных классов делят 2. Если порядок некоторой Q-орбиты равен 1, то Q фиксирует каждый антиподальный класс и $|Q|$ делит 4, противоречие с утверждением (1). Теперь подгруппа Q_0 индекса 2 из Q фиксирует F и подгруппа Q_1 индекса 16 из Q фиксирует F поточечно. Так как $k = 121$, то Q_1 фиксирует вершину b из $[a]$. Подгруппа Q_2 индекса 16 из Q_1 фиксирует a, b и по 6 вершин из $[b] \cap [x]$ для $x \in F$. Аналогично, подгруппа Q_3 индекса 16 из Q_1 фиксирует a, b и по 6 вершин из $[a] \cap [y]$ для $y \in F(b)$. Теперь любая инволюция из $Q_2 \cap Q_3$ фиксирует не менее $2+6+36$ антиподальных классов и по теореме 2 имеем $Q_2 \cap Q_3 = 1$. Отсюда $|Q| \leqslant 36$, противоречие с действием элемента порядка 61 на Q. Из утверждения (1) следует, что $S(G) = O_2(G)$ и $|O_2(G)|$ делит 4.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. Ввиду теоремы из [4], группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(3^5)$, $U_5(3)$, $L_2(11^2)$, $U_6(3)$.

Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 122, то группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(121)$ (и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 121 с помощью группы порядка 60). Лемма доказана.

Докажем следствие. Ввиду леммы 10, подгруппа T изоморфна $L_2(121)$, $SL_2(121)$, $Z_2 \times L_2(121)$, $Z_2 \times SL_2(121)$ или $K \times L_2(121)$, где $|K| = 4$.

Пусть подгруппа H изоморфна $SL_2(121)$ или $L_2(121)$. Тогда наименьший индекс в H её максимальной подгруппы равен 122, поэтому H действует транзитивно на множестве антиподальных классов. Понятно, что H — нормальная подгруппа, поэтому G действует на множестве H-орбит, и, значит, H-орбиты являются изоморфными подграфами порядка не меньше 122. Есть такие варианты:

1. Четыре H-орбиты порядка 122, на которых H действует 2-транзитивно. Нетрудно понять, что это невозможно.

2. Две H-орбиты порядка 244. Стабилизатор антиподального класса $H_{\{F\}}$ и стабилизатор вершины H_a находятся однозначно с точностью до сопряжения, причём $Z(H) \leqslant H_a$. Орбиты H_a, лежащие в той же H-орбите, что и a, имеют порядки 1, 121, 121, 1. Понятно, что две неподвижные относительно H_a вершины – это пара антиподов. Поэтому окрестность a в соответствующей H-орбите либо пуста, либо содержит 121 вершину. Первое невозможно потому, что граф не двудольный. Второе невозможно потому, что граф связный.

3. H действует транзитивно. Тогда стабилизатор антиподального класса и стабилизатор вершины находятся однозначно с точностью до сопряжения (при этом $Z(H) \leqslant H_a$) и существует единственный дистанционно регулярный граф с заданным массивом, допускающий H.

Следствие доказано.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 2 и следствие) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1).

Список литературы

[1] A. A. Makhnev, M. S. Samoilenko. On distance-regular covers of cliques with strongly regular local subgraphs. *Tranzactions of 46 International school-conference, Yekaterinburg*, 13–18, 2015.

[2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. *Distance-Regular Graphs.* Springer-Verlag, 1989.

[3] A. L. Gavrilyuk, A. A. Makhnev. On automorphisms of distance-regular graph with the intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Doklady RAN*, 432(5):300–304, 2010.

[4] A. V. Zavarnitsine. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sibirean electr. Math. Reports*, 6:1–12, 2009.

Automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{121, 90, 1; 1, 30, 121\}$

Konstantin S. Efimov[2], *Alexander A. Makhnev*[1]
1 – Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)
2 – Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

A.A. Makhnev and M.S. Samoilenko determined parameters of strongly regular graphs with at most 1000 vertices, which may be local subgraphs in antipodal distance-regular graph of diameter 3 with $\lambda = \mu$. They suggested the program of investigation of antipodal distance-regular graphs of diameter 3 with $\lambda = \mu$, in which local subgraphs are strongly regular with at most 1000 vertices. In this paper, we consider distance-regular graph with intersection array $\{121, 90, 1; 1, 30, 121\}$. It is proved that vertex-symmetric graph with intersection array $\{121, 90, 1; 1, 30, 121\}$ is arc-transitive with the socle of automorphism group isomorphic $Z_2 \times L_2(121)$.