Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$

А.А. Махнев[1]
makhnev@imm.uran.ru

М.С. Самойленко[2]
ghost1212@mail.ru

1 – ИММ УрО РАН (Екатеринбург)

2 – УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

А.А. Махнев и М.С. Самойленко выделили параметры сильно регулярных графов с не более чем 1000 вершинами, которые могут быть окрестностями вершин в антиподальном дистанционно регулярном графе диаметра 3 с $\lambda = \mu$. Ими же предложена программа исследования вершинно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в которых окрестности вершин сильно регулярны с вышеуказанными параметрами. В данной работе рассмотрен граф с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$. Доказано, что вершинно симметричный граф с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$ является реберно симметричным с цоколем группы автоморфизмов, изоморфным $Z_2 \times L_2(121)$.

1 Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Допустим, что Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в котором окрестности вершин сильно регулярны. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$ и спектр $k^1, \sqrt{k}^f, -1^k, -\sqrt{k}^f$, где $f = (k+1)(r-1)/2$. Далее, $(r-1)k' = v' - k' - 1$ и число $(v'+1)(r-1)$ четно. В случае $r = 2$ получим граф Тэйлора, в котором $k' = 2\mu'$. Обратно, для любого сильно регулярного графа с параметрами $(v', 2\mu', \lambda', \mu')$ найдется граф Тэйлора, в котором окрестности вершин сильно регулярны с соответствующими параметрами.

В [1] выделены параметры сильно регулярных графов с не более чем 1000 вершинами, которые могут быть окрестностями вершин в антиподальном дистанционно регулярном графе диаметра 3 с $\lambda = \mu$.

Продолжается программа исследования вершинно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из заключения предложения [1]. В данной работе рассмотрен граф с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at http://ceur-ws.org

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11, 61\}$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) если Ω — пустой граф и $p \in \{2, 3, 61\}$;

(2) если $p \geqslant 7$, то $p = 11$, Ω — антиподальный класс и $\alpha_1(g) = 22l$;

(3) если $p = 5$, то либо (1) $s = 1$, Ω является t-кликой, $t = 2, 7, 12$, либо $s = 6$, $t = 2$, Ω является объединением шести изолированных ребер или $t = 7$, Ω является объединением шести изолированных 7-клик, или $t = 12$;

(4) если $p = 3$, то $t = 3l + 2$ и либо $s = 6$, $14 \leqslant t \leqslant 20$, причем в случае $t = 14$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$, либо $s = 3$, $8 \leqslant t \leqslant 38$, причем в случае $t = 8$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$;

(5) если $p = 2$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω и либо $s = 6$, $t = 2, 4, ..., 20$, либо $s = 4$, $2 \leqslant t \leqslant 30$, либо $s = 2$, $2 \leqslant t \leqslant 42$, причем в случае $t = 42$ граф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{41, 20, 1; 1, 20, 41\}$.

Следствие. *Вершинно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$ является реберно симметричных графом с группой автоморфизмов, имеющей цоколь $Z_2 \times L_2(121)$.*

2 Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$

В этом параграфе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$ и спекром $121^1, 11^{305}, -1^{121}, -11^{305}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $g \in G$.

Заметим, что ввиду границы Дельсарта (предложение 4.4.6 [2]) максимальный порядок клики в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$ не больше $1 - k/\theta_d = 1 + 121/11 = 12$. Если C является 12-кликой из Γ, то каждая вершина вне C смежна с 0 или с $b_1/(\theta_d + 1) + 1 - k/\theta_d = -10 + 12 = 2$ вершинами из C.

Лемма 1. *Пусть ψ — мономиальное представление группы G в $GL(732, \mathbf{C})$, χ_1 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 305, отвечающих собственному значению 11, χ_2 — характер проекции ψ на подпространство размерности 121, тогда $\chi_1(g) = (28\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - 5\alpha_3(g))/66 - 61/11$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/6 - 1$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 305$ и $\chi_2(g) - 121$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 305 & 305/11 & -61/11 & -61 \\ 121 & -1 & -1 & 121 \\ 305 & -305/11 & 61/11 & -61 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g)/11 - \alpha_2(g)/11 - \alpha_3(g))/12$. Подставляя $\alpha_2(g) = 732 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (28\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - 5\alpha_3(g))/66 - 61/11$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (121\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 121\alpha_3(g))/732$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 732 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/6 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [3]. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если Ω — пустой граф, то либо $p = 61$, $\alpha_1(g) = 122$ и $\alpha_2(g) = 610$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 18l - 6$, $\alpha_1(g) = 30l + 90 + 66m$, $\alpha_2(g) = 612 - 48l - 66m$, $l \leqslant 41$ и $8l + 11m \leqslant 102$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 12l$, $\alpha_1(g) = 20l + 12 + 44m$ и $\alpha_2(g) = 720 - 32l - 44m$, $l \leqslant 61$ и $8l + 11m \leqslant 180$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$. Так как $v = 61 \cdot 12$, то $p \in \{2, 3, 61\}$.

Пусть $p = 61$. Тогда $\alpha_3(g) = 0$ и $\chi_1(g) = 61(w_1 - 2)/22$. Отсюда $w_1 = 22l + 2$, $\alpha_1(g) = 122$ и $\alpha_2(g) = 610$.

Пусть $p = 3$. Тогда $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/6 - 1$ сравнимо с 1 по модулю 3. Отсюда $\alpha_3(g) = 18l - 6$. Далее, $\chi_1(g) = (3w_1 - 5(6l - 2) - 122)/22$ сравнимо с 2 по модулю 3, поэтому $w_1 = 10l + 30 + 22m$, $\alpha_1(g) = 30l + 90 + 66m$ и $\alpha_2(g) = 612 - 48l - 66m$, $l \leqslant 41$ и $8l + 11m \leqslant 102$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/6 - 1$, $\alpha_3(g) = 12l$ и число $\chi_1(g) = (w_1 - 10l - 61)/11$ нечетно. Поэтому $w_1 = 10l + 6 + 22m$ и $\alpha_1(g) = 20l + 12 + 44m$ и $\alpha_2(g) = 720 - 32l - 44m$.

В леммах 3–6 предполагается, что $a \in \Omega$, F — антиподальный класс, содержащий вершину a, $F \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$, $b \in \Omega(a)$. Черех $F(x)$ будем обозначать антиподальный класс, содержащий вершину x.

Лемма 3. *Если число p больше 5, то $p = 11$, Ω — антиподальный класс и $\alpha_1(g) = 22l$.*

Доказательство. Если $s = 6$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω.

Пусть $p > 5$, $\alpha_1(g) = pw_1$. Тогда $s = 6$, $\alpha_3(g) = 0$, $|\Omega| = 6t$, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $122 - t$.

Если $p > 19$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, t - 22, 1; 1, 20, t - 1\}$, противоречие.

Пусть $p = 19$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 8$, подграф $\Omega(b)$ содержит 2 вершины из $a^\perp$ и по вершине из $[a_2], ..., [a_6]$, поэтому Ω – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 5, 1; 1, 1, 7\}$, окрестность вершины в Ω – объединение изолированных ребер, противоречие.

Пусть $p = 17$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 3, 20$. Для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 4 вершины из $a^\perp$ и по 3 вершины из $[a_2], ..., [a_6]$, поэтому Ω дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{19, 15, 1; 1, 3, 19\}$. Так как $t = 20$, то каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 17 является кокликой. Поэтому $\chi_1(g) = (28 \cdot 20 - 204 - 61)/11$, противоречие.

Пусть $p = 13$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 5, 18$. Для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 8 вершин из $a^\perp$ и по 7 вершин из $[a_2], ..., [a_6]$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 1, 12$. В случае $t = 12$ подграф $\Omega(b)$ содержит 10 вершин из $a^\perp$ и по 9 вершин из $[a_2], ..., [a_6]$, противоречие. В случае $t = 1$ имеем $\chi_1(g) = (28 + \alpha_1(g)/2 - 61)/11$ и $\alpha_1(g) = 22l$.

Пусть $p = 7$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 3, 10, 17$. Для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 7 вершин из $a^\perp$ и по 6 вершин из $[a_2], ..., [a_6]$, противоречие.

Лемма 4. *Если $p = 5$, то либо*

(1) $s = 1$, *Ω является t-кликой, $t = 2, 7, 12$, либо*

(2) $s = 6$, $t = 2$, *Ω является объединением шести изолированных ребер или $t = 7$, Ω является объединением шести изолированных 7-клик, или $t = 12$.*

Доказательство. Пусть $p = 5$. Тогда $s = 1, 6$. Так как p делит $122 - t$, то $t = 2, 7, 12, 17$.

Если $s = 1$, то Ω является t-кликой, $t = 2, 7, 12$.

Пусть $s = 6$. В случае $t = 2$ граф Ω является объединением шести изолированных ребер.

В случае $t = 7$ граф Ω является объединением изолированных 7-клик и, быть может, графа Δ без треугольников. Пусть $\Delta(a) = \{b_1, ..., b_6\}$. Без ограничения общности, $\Delta(b_i)$ содержит 5 вершин из $[a_{i+1}]$. Противоречие с тем, что вершина из $\Delta(b_1) \cap [a_2]$ должна быть смежна с 5 вершинами из $\Delta(a)$.

Лемма 5. *Если $p = 3$, то $t = 3l + 2$ и либо*

(1) $s = 6$, $14 \leqslant t \leqslant 20$, *причем в случае $t = 14$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$, либо*

(2) $s = 3$, $8 \leqslant t \leqslant 38$, *причем в случае $t = 8$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$.*

Доказательство. Пусть $p = 3$. Так как 3 делит $122 - t$, то $t = 3l + 2$. Далее, $s = 3, 6$. Для вершины $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит от 3 до 21 вершин из $a^\perp$ и от 2 до 20 вершин из $[a_i]$ для $i \geqslant 2$.

Если $t = 2$, то Ω — объединение трех или шести изолированных ребер. Противоречие с тем, что $\lambda = 20$ не делится на 3.

Пусть $t \geqslant 5$. Если $s = 6$, то $14 \leqslant t \leqslant 20$, причем в случае $t = 14$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$.

Если $s = 3$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $3t(122 - t)$, но не больше $6(122 - t)20$, поэтому $8 \leqslant t \leqslant 38$, причем в случае $t = 8$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$.

Лемма 6. *Если $p = 2$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω и либо*

(1) $s = 6$, $t = 2, 4, ..., 20$, *либо*

(2) $s = 4$, $2 \leqslant t \leqslant 30$, *либо*

(3) $s = 2$, $2 \leqslant t \leqslant 42$, *причем в случае $t = 42$ граф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{41, 20, 1; 1, 20, 41\}$.*

Доказательство. Пусть $p=2$. Тогда $s \in \{2,4,6\}$ и t четно. Заметим, что для любых двух вершин $a,b \in \Omega$ имеем $|\Omega(a) \cap [b]| \in \{0,2,...,20\}$, любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω.

Так как $\alpha_3(g) = t(6-s)$, то $\chi_2(g) = t-1$, t четно, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g) = 122-t$ и $\chi_1(g) = (11st/2 + \alpha_1(g)/2 - 5t - 61)/11$ и $\alpha_1(g)+t-1$ делится на 11.

Если $s=6$, то $t = 2,4,...,20$.

Если $s=4$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $4t(122-t)$, но не больше $6(122-t)20$, поэтому $2 \leqslant t \leqslant 30$.

Если $s=2$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $2t(122-t)$, но не больше $6(122-t)20$, поэтому $2 \leqslant t \leqslant 60$. С другой стороны, $\Omega(b)$ содержит не более 21 вершины из $a^\perp$ и не более 20 вершин из $[a_2]$, поэтому $t \leqslant 42$, причем в случае $t=42$ подграф Ω является графом Тэйлора с массивом пересечений $\{41,20,1;1,20,41\}$ и $\Omega(b)$ – сильно регулярный граф с параметрами (41,20,9,10). Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

3 Вершинно симметричный случай $\{121,100,1;1,20,121\}$

Пусть группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Г. Тогда подгруппа $G_{\{F\}}$ имеет индекс 122 в G. Из теоремы следует, что $\{2,3,61\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2,3,5,11,61\}$ и $|G|$ не делится на 11^3.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) *если f — элемент порядка 61 из G, то $C_G(f) = \langle f \rangle$;*
(2) *$S(G) = O_2(G)$ и в G нет подгрупп порядка 3, полурегулярных на каждом антиподальном классе;*
(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфен $L_2(3^5)$, $L_2(11^2)$.*

Доказательство. Допустим, что g — элемент простого порядка $p \neq 61$ из $C_G(f)$. Тогда $\alpha_1(f) = 122$ и $\alpha_2(f) = 610$. Так как f действует без неподвижных точек на Ω, то ввиду теоремы Ω — пустой граф, $p=2$ и числа $\alpha_3(g) = 12l$, $\alpha_1(g) = 20l + 12 + 44m$, $\alpha_2(g) = 720 - 32l - 44m$ делятся на 61. Отсюда $12+44m$ и $720-44m$ делятся на 61, противоречие.

Пусть $Q = O_p(G) \neq 1$. Если $p=3$, то каждый элемент порядка 3 из Q действует без неподвижных точек на любом антиподальном классе. Противоречие с тем, что 3 не делит 122.

Теперь ввиду утверждения (1) число p не равно 61 и $S(G)$ является 2-группой.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. Так как 11^3 не делит $|G|$, то ввиду теоремы 1 [4] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(3^5)$, $L_2(11^2)$. Лемма доказана.

Докажем следствие. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 122, то группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(121)$ (и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 121 с помощью группы порядка 60). Отсюда $|S(G)|$ делит 2. Компьютерные вычисления в GAP показывают, что цоколь группы G изоморфен $Z_2 \times L_2(121)$ и Г является реберно симметричным графом. Следствие доказано.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00061).

Список литературы

[1] A.A. Makhnev, M.S. Samoilenko. On distance-regular covers of cliques with strongly regular local subgraphs. *Tranzactions of 46 International school-conference, Yekaterinburg*, 13–18, 2015.

[2] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier. *Distance-Regular Graphs.* Springer-Verlag, 1989.

[3] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev. On automorphisms of distance-regular graph with the intersection array $\{56,45,1;1,9,56\}$. *Doklady RAN* 432(5):300–304, 2010.

[4] A.V. Zavarnitsine. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sibirean electr. Math. Reports* 6:1–12, 2009.

Automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$

Alexandr A. Makhnev[1], *Mikhail S. Samoilenko*[2]
1 – Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)
2 – Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

A.A. Makhnev and M.S. Samoilenko determined parameters of strongly regular graphs with at most 1000 vertices, which may be local subgraphs in antipodal distance-regular graph of diameter 3 with $\lambda = \mu$. They suggested the program of investigation of antipodal distance-regular graph of diameter 3 with $\lambda = \mu$, in which local subgraphs are strongly regular with at most 1000 vertices. In this paper, we consider distance-regular graph with intersection array $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$. It is proved that vertex-symmetric graph with intersection array $\{121, 100, 1; 1, 20, 121\}$ is arc-transitive with the socle of automorphism group isomorphic $Z_2 \times L_2(121)$.