Неравенство Бернштейна для дробных производных малого порядка тригонометрических полиномов в пространстве L_0

А. О. Леонтьева
sinusoida2012@yandex.ru

УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

Получены двусторонние оценки для наилучшей константы в неравенстве Бернштейна для дробных производных малого порядка тригонометрических полиномов в L_0.

Ключевые слова: тригонометрический полином, производная Вейля, неравенство Бернштейна

1 Введение

Пусть $\mathscr{T}_n = \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ есть множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1}$$

порядка $n \geqslant 1$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Для параметра p, удовлетворяющего условию $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, определим на $\mathscr{T}_n$ функционал $\|\cdot\|_p$ соотношениями

$$\|f_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < p < \infty,$$

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{C_{2\pi}} = \lim_{p \to +\infty} \|f_n\|_p = \max\{|f_n(t)| \colon t \in \mathbb{R}\},$$

$$\|f_n\|_0 = \lim_{p \to +0} \|f_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_n(t)| dt \right);$$

лишь при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ этот функционал является нормой.

Дробной производной (производной Вейля) порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, полинома (1) называется полином

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) \right). \tag{2}$$

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at http://ceur-ws.org

Для натуральных значений α дробная производная совпадает с классической: $D^\alpha f_n = f_n^{(\alpha)}$. Богатую информацию о дробных производных и интегралах можно найти в монографии [15].

Формулой (2) определен линейный оператор на множестве $\mathscr{T}_n$. Оператор (2) есть оператор свертки

$$D^\alpha f_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t-u)\mathcal{D}_n^\alpha(u)du,$$

ядро которого есть производная порядка α ядра Дирихле:

$$\mathcal{D}_n^\alpha(u) = \sum_{k=1}^n k^\alpha \cos\left(ku + \frac{\pi\alpha}{2}\right) = D^\alpha \mathcal{D}_n(u), \qquad \mathcal{D}_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku.$$

Обозначим через $B_n^\alpha(p)$ наименьшую возможную (наилучшую) константу в неравенстве

$$\|D^\alpha f_n\|_p \le B_n^\alpha(p)\,\|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{T}_n, \tag{3}$$

называемом неравенством Берштейна. Величину $B_n^\alpha(p)$ можно интерпретировать как норму оператора D^α на пространстве $\mathscr{T}_n$ относительно функционала $\|\cdot\|_p$; для нее имеет место формула

$$B_n^\alpha(p) = \sup\{\|D^\alpha f_n\|_p \colon \|f_n\|_p \leqslant 1, f_n \in \mathscr{T}_n\}. \tag{4}$$

Неравенствам (3) посвящено большое число работ; наиболее полно они изучены при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для $\alpha \geqslant 1$ и особенно для натуральных α (см. работы [21, 5, 16, 6, 17] и приведенную там библиографию). Отметим лишь некоторые известные факты в этой тематике, возможно, и не в хронологическом порядке. Поскольку оператор (2) есть оператор свертки, то

$$B_n^\alpha(p) \leqslant B_n^\alpha(\infty), \qquad 1 \leqslant p < \infty \tag{5}$$

$$B_n^\alpha(p) \leqslant B_n^\alpha(0), \qquad 0 \leqslant p \leqslant \infty;$$

первое неравенство хорошо известно, второе доказано в [3] для более общей ситуации.

При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для $\alpha \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|f_n^{(\alpha)}\|_p \leqslant n^\alpha \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C}). \tag{6}$$

Это неравенство точное и обращается в равенство лишь на полиномах $ae^{int} + be^{-int}$, $a, b \in \mathbb{C}$; так что $B_n^\alpha(p) = n^\alpha$, если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha \geqslant 1$. Наиболее известным здесь является неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_{C_{2\pi}} \leqslant n\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{R}), \tag{7}$$

в равномерной норме (т. е. при $p = \infty$) на множестве $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ вещественных тригонометрических полиномов. С. Н. Бернштейн [20] получил в 1912 году неравенство (7) с константой n для нечетных и четных тригонометрических полиномов и, как следствие, с константой $2n$ на классе всех полиномов из $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$. В переиздании [8] работы [20] в собрании сочинений С. Н. Бернштейна приведено неравенство (7) на всем классе $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ тригонометрических полиномов с вещественными коэффициентами. В авторских комментариях [7, п. 3.4] к работе [8] С. Н. Бернштейн пишет, что приведенный в [8] вывод, показывающий, что общее неравенство является элементарным следствием того же неравенства для суммы синусов, сообщен ему Э. Ландау вскоре после появления диссертации [20] и впервые был опубликован в [19, § 10]. В 1914 г. М. Рисс [23, 22] (см. также, к примеру, [10, гл. 10]) получил неравенство (7) с наилучшей константой n с помощью известной интерполяционной формулы Рисса для производной тригонометрического полинома; это доказательство дает неравенство (7) уже на множестве $\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами. В 1933 г. А. Зигмунд с помощью интерполяционной формулы Рисса доказал (см. [10, гл. 10]) неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_p \leqslant n\|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C}),$$

в пространствах L_p, $p \geqslant 1$; отсюда следует, что при $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ для любых натуральных n и α имеет место неравенство (6). В случае $0 \leqslant p < 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$ неравенство (6) в 1979 году получил (иным путем) В. В. Арестов [1, 2]. При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для вещественных $\alpha \geqslant 1$ неравенство (6) обосновал П. И. Лизоркин [12].

Для значений $0 \leqslant \alpha < 1$ неравенство (3) изучено существенно хуже. Т. Банг [18], а позже С. П. Гейсберг [9] (см. [15, теорема 19.10 и примечания к § 19, п. 8]) показали, что при $0 \leqslant \alpha < 1$ справедливы оценки

$$n^\alpha \leqslant B_n^\alpha(\infty) \leqslant \frac{2^{1-\alpha} n^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \leqslant 2n^\alpha.$$

Г. Вилмес получил [24] более точную оценку сверху

$$B_n^\alpha(\infty) \leqslant 2^{1-\alpha} n^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Отсюда в силу (5) следует, что при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливы оценки

$$n^\alpha \leqslant B_n^\alpha(p) \leqslant 2^{1-\alpha} n^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

При $0 \leqslant p < 1$ для значений $0 \leqslant \alpha < 1$ величина (4), насколько нам известно, не изучалась. Полином $f_n(t) = \cos nt$ дает оценку $B_n^\alpha(p) \geqslant n^\alpha$. Однако эта оценка, скорее всего, грубая. Автору удалось [11] получить двусторонние оценки для константы $B_n^0(0)$; а именно, для $n \geqslant 1$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{4}\, C_{2n}^n \leqslant B_n^0(0) \leqslant 2C_{2n}^{n-1}.$$

Последнее утверждение дает порядок поведения $B_n^0(0)$ по n при $n \to \infty$. В самом деле, воспользовавшись известной формулой Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to +\infty,$$

находим

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!\, n!} \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{(2\pi)^2\, n^2} \left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Здесь символ $\approx$ означает, что отношение двух величин стремится к 1 при $n \to \infty$. Аналогично находим, что $C_{2n}^{n-1} \approx \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Поэтому для величины $B_n^0(0)$ справедливо следующее порядковое соотношение:

$$B_n^0(0) \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \qquad n \to \infty.$$

Таким образом, величина $B_n^0(0)$ имеет по n экспоненциальный рост.

В данной работе изучается величина $B_n^\alpha(0)$ для $0 < \alpha < 1$ и будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1 *Для $n \geqslant 1$ при*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{n+2}{n-1} \tag{8}$$

справедливы неравенства

$$n^\alpha \leqslant B_n^\alpha(0) \leqslant 2C_{2n}^{n-1}. \tag{9}$$

Хорошую оценку снизу величины $B_n^\alpha(0)$ для $0 < \alpha < 1$ автору пока получить не удалось. Вычисления на компьютере показывают, что при достаточно малых α имеет место оценка

$$B_n^\alpha(0) \geqslant C_{2n}^{n-1} \gamma(n, \alpha),$$

где $\gamma(n,\alpha)$ — величина, близкая к 1.

Доказательство теоремы 1 будет осуществлено в следующем параграфе в несколько этапов.

2 Исследование величины $B_n^\alpha(0)$ для малых α

2.1 Некоторые известные результаты

Пусть $\mathscr{P}_m$ есть множество алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами степени (не выше) m. Рассмотрим на множестве $\mathscr{P}_m$ функционал

$$\|P_m\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left|P_m\left(e^{it}\right)\right| dt\right), \quad P_m \in \mathscr{P}_m.$$

Хорошо известно (см. библиографию в [4]), что если многочлен

$$P_m\left(z\right) = c_m \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)$$

имеет отличный от нуля старший коэффициент c_m и $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — его корни, то

$$\|P_m\|_0 = |c_m| \prod_{k=1}^{m} \max\left(1, |z_k|\right). \tag{10}$$

Многочлен $P_m \in \mathscr{P}_m$ удобно записывать в виде

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k c_k z^k. \tag{11}$$

Пусть

$$\Lambda_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda_k z^k \tag{12}$$

есть еще один многочлен из $\mathscr{P}_m$. Многочлен

$$\Lambda_m P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda_k c_k z^k \tag{13}$$

называют композицией Сеге многочленов (12) и (11); см. библиографию в [2]. При фиксированном многочлене Λ_m формула (13) задает линейный оператор в $\mathscr{P}_m$, который удобно обозначать теми же символами Λ_m. Для композиции Сеге справедливо [3] точное неравенство

$$\|\Lambda_m P_m\|_0 \leqslant \|\Lambda_m\|_0 \, \|P_m\|_0 \, ,$$

которое на многочлене

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k z^k = (1+z)^m$$

обращается в равенство.

Формула

$$P_{2n}\left(e^{it}\right) = e^{int} f_n\left(t\right) \tag{14}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов f_n порядка n и множеством $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов P_{2n} степени $2n$; при этом, очевидно,

$$\|P_{2n}\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f_n(t)|\, dt\right) = \|f_n\|_0 \, .$$

Убедимся, что оператору (2) во множестве $\mathscr{T}_n$ соответствует в $\mathscr{P}_{2n}$ оператор композиции Сеге. Действительно, пусть $f_n \in \mathscr{T}_n$ и $g_n = D^\alpha f_n$. Сопоставим этим тригонометрическим полиномам по формуле (14) алгебраические многочлены P_{2n} и Q_{2n} такие, что

$$P_{2n}\left(e^{it}\right) = e^{int} f_n\left(t\right), \qquad Q_{2n}\left(e^{it}\right) = e^{int} D^\alpha f_n\left(t\right).$$

Исходя из представления (1) полинома f_n, получаем следующие явные выражения многочленов P_{2n} и Q_{2n}:

$$P_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} z^{n-k} + \frac{a_0}{2} z^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} z^{n+k},$$

$$Q_{2n}(z) = e^{-i\pi\alpha/2} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} k^\alpha z^{n-k} + e^{i\pi\alpha/2} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} k^\alpha z^{n+k}.$$

Нетрудно видеть, что Q_{2n} есть композиция $\Lambda_{2n}^\alpha P_{2n}$ многочлена P_{2n} и многочлена

$$\Lambda_{2n}^\alpha(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k (n-k)^\alpha \left(e^{-i\pi\alpha/2} z^k + e^{i\pi\alpha/2} z^{2n-k}\right). \tag{15}$$

Таким образом, неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$\|\Lambda_{2n}^\alpha P_{2n}\|_0 \leqslant B_n^\alpha(0) \, \|P_{2n}\|_0 \,, \qquad P_{2n} \in \mathscr{P}_{2n}.$$

Приведенные только что рассуждения влекут такое утверждение.

При $n \geqslant 1$ для величины $B_n^\alpha(0)$ имеет место формула

$$B_n^\alpha(0) = \|\Lambda_{2n}^\alpha\|_0$$

и на полиноме $\cos^{2n}(t/2)$ неравенство (3) обращается в равенство. Поскольку неравенство (3) обращается в равенство на вещественном тригонометрическом полиноме, то оно является точным как на множестве полиномов с комплексными коэффициентами, так и с вещественными.

В дальнейшем изучается именно величина $\|\Lambda_{2n}^\alpha\|_0$ для многочлена (15).

2.2 Вспомогательные результаты

Следующее утверждение легко вытекает из известных фактов. Однако для полноты изложения мы приведем его доказательство.

Лемма 1 *Если коэффициенты алгебраического многочлена*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

действительны, неотрицательны и не возрастают: $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} \geqslant a_n > 0$, *то*

$$\|F\|_0 = a_0.$$

Доказательство. Убедимся, что многочлен F не может иметь корней, по модулю меньших 1 (подобное утверждение см. в [13, гл. 8, § 2]). Запишем многочлен F в виде

$$\begin{aligned} F(z) = {} & (a_0 - a_1) + \\ & + (a_1 - a_2)(1+z) + \\ & + (a_2 - a_3)\left(1 + z + z^2\right) + \ldots + \\ & + (a_{n-1} - a_n)\left(1 + z + \ldots + z^{n-1}\right) + \\ & + a_n\left(1 + z + \ldots + z^{n-1} + z^n\right). \end{aligned}$$

Положим $a_k - a_{k+1} = b_k \ \ (k \neq n)$, $a_n = b_n$; поскольку коэффициенты многочлена не возрастают, то все b_k неотрицательные. Из полученного представления следует, что

$$F(z)(1-z) = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(1 - z^{k+1}\right).$$

Если $|z| < 1$, то точка $1 - z^{k+1}$ лежит в открытом круге $|z-1| < 1$. Поэтому $\mathrm{Re}\left(1 - z^{k+1}\right) > 0$ и, следовательно,

$$\mathrm{Re}\left(F(z)\,(1-z)\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot \mathrm{Re}\left(1 - z^{k+1}\right) > 0.$$

Таким образом, действительно, многочлен F не имеет корней, по модулю меньших 1. Согласно формуле (10), будем иметь

$$\|F\|_0 = a_n \prod_{k=1}^{n} |z_k| = a_0,$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ — корни F. Лемма доказана. □

Следствие. *Если коэффициенты многочлена* $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ *действительны, неотрицательны и не убывают, то*

$$\|F\|_0 = a_n.$$

Для доказательства достаточно применить лемму 1 к многочлену $z^n F(1/z)$.

Лемма 2 *Если многочлен* $P_{2n}(z)$ *представим в виде*

$$P_{2n}(z) = F(z) + z^{2n}\overline{F\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)},$$

где $F(z)$ *— многочлен степени не выше* $2n$, *то справедливо неравенство*

$$\|P_{2n}\|_0 \leqslant 2\,\|F\|_0\,.$$

Доказательство. На единичной окружности имеем

$$\left|P_{2n}\left(e^{it}\right)\right| = \left|e^{int}\left(e^{-int}F\left(e^{it}\right) + e^{int}\overline{F\left(e^{it}\right)}\right)\right| = 2\left|\mathrm{Re}\left(e^{-int}F\left(e^{it}\right)\right)\right| \leqslant 2\left|F\left(e^{it}\right)\right|.$$

Следовательно, $\|P_{2n}\|_0 \leqslant 2\,\|F\|_0$. Лемма 2 доказана. □

2.3 Оценка сверху в теореме 1

Многочлен Λ_{2n}^{α}, определенный формулой (15), удовлетворяет условию леммы 2, при этом

$$F_\alpha(z) = e^{-i\pi\alpha/2} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{k} (n-k)^{\alpha} z^k.$$

Поэтому

$$\|\Lambda_{2n}^{\alpha}\|_0 \leqslant 2\,\|F_\alpha\|_0\,.$$

Убедимся, что в условиях теоремы 1 все корни многочлена F_α по модулю не больше 1; в этом случае в соответствии с формулой (10) будем иметь

$$\|F_\alpha\|_0 = C_{2n}^{n-1}. \tag{16}$$

Для этого достаточно, чтобы многочлен F_α с точностью до постоянного множителя удовлетворял условиям следствия из леммы 1 (имела место монотонность коэффициентов). Монотонность (а точнее, неубывание) коэффициентов означает выполнение неравенств

$$C_{2n}^{k}\,(n-k)^{\alpha} \leqslant C_{2n}^{k+1}\,(n-k-1)^{\alpha}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, n-2$. Эти неравенства равносильны тому, что

$$\left(1 + \frac{1}{n-k-1}\right)^{\alpha} \leqslant \frac{2n-k}{k+1}$$

или

$$\alpha \leqslant \frac{\ln \dfrac{2n-k}{k+1}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n-k-1}\right)}.$$

Последняя дробь убывает по k. Взяв $k = n-2$, как раз и получим ограничение (8) на α.

Итак, действительно, в условиях теоремы 1 имеет место (16). Оценка сверху в теореме 1 доказана. $\square$

2.4 Оценка снизу

Для полинома $c_n(t) = \cos nt$ согласно формуле (2) имеем $D^\alpha c_n(t) = n^\alpha \cos\left(nt + \frac{\pi\alpha}{2}\right)$. Подставив полином $\cos nt$ в неравенство (3), получаем оценку $B_n^\alpha(p) \geqslant n^\alpha$ при всех $\alpha \geqslant 0,\ 0 \leqslant p \leqslant \infty$. В частности, справедливо первое неравенство в (9).

Итак, при выполнении условия (8) выполняются оба неравенства (9). Тем самым теорема 1 полностью доказана. $\square$

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Список литературы

[1] V.V. Arestov. On inequalities of S.N. Bernstein for algebraic and trigonometric polynomials. *Soviet Math. Dokl.*, 20(3):600–603, 1979.

[2] V.V. Arestov. On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. USSR Izvestija*, 18(1):1–17, 1982.

[3] V.V. Arestov. Integral inequalities for algebraic polynomials on the unit circle. *Math. Notes*, 48(4):977–984, 1990.

[4] V.V. Arestov. The Szegö inequality for derivatives of a conjugate trigonometric polynomial in L_0. *Math. Notes*, 56(6):1216–1227, 1994.

[5] V.V. Arestov. Sharp inequalities for trigonometric polynomials with respect to integral functionals. *P*roc. Steklov Inst. Math., 273(Suppl. 1):21–36, 2011.

[6] V.V. Arestov, P.Yu. Glazyrina. Integral inequalities for algebraic and trigonometric polynomials. *Doklady Mathematics*, 85(1):104–108, 2012.

[7] S.N. Bernstein. Author's comments. In *"Collected works"*, Vol. 1, pp. 526–562. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1952 (in Russian). = С.Н. Бернштейн. Авторские комментарии. Собр. соч.: в 4 т., т. 1., с. 526–562. М.: Изд-во АН СССР, 1952.

[8] S.N. Bernstein. On the best approximation of continuous functions by polynomials of given degree. In *"Collected Works"*, Vol. 1. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1952 (in Russian). = С.Н. Бернштейн. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. Собр. соч.: в 4 т., т. 1. М.: Изд.-во АН СССР, 1952.

[9] S.P. Geisberg. Analogues of S.N. Bernstein inequalities for fractional derivative. *Voprosy prikladnoy matematiki i matematicheskogo modelirovaniya : Kratkie soderzhaniya dokl. 25-j nauch. conf. — 24 janv. – 4 fevr. 1967 g.* L.: Leningr. inzh.-stroit. in-t, 5–10, 1967 (in Russian). = С.П. Гейсберг. Аналоги неравенств С.Н. Бернштейна для дробной производной. *Вопросы прикладной математики и математического моделирования : Краткие содержания докл. 25-й науч. конф. — 24 янв. – 4 февр. 1967 г.* Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т, 5–10, 1967.

[10] A. Zygmund. *Trigonometric Series*, Vol. II. Cambridge University Press, New York, 1959.

[11] A.O. Leontyeva. Bernstein inequality in L_0 for zero order derivative of trigonometric polynomials. *Tr. In-ta Mat. Mekh. UrO RAN*, 19(2):216–223, 2013 (in Russian). = А.О. Леонтьева. Неравенство Бернштейна в L_0 для производной нулевого порядка тригонометрических полиномов. *Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН*, 19(2):216–223, 2013.

[12] P.I. Lizorkin. Estimates for trigonometric integrals and Bernstein inequality for fractional derivatives. *Izv. AN SSSR. Ser. mat.*, 4(3):109–126, 1965 (in Russian). = П.И. Лизоркин. Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных. *Изв. АН СССР. Сер. мат*, 4(3):109–126, 1965.

[13] A.I. Markushevich. *The Theory of Analytical Functions: A Brief Course.* Mir Publishers, 1983.

[14] G. Polya, G. Szego. *Problems and Theorems in Analysis I.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[15] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[16] V.V. Arestov. Sharp integral inequalities for trigonometric polynomials. *Constructive theory of functions: in memory of Borislav Bojanov (Proceedings of the International conference, Sozopol, 2010). (G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.).* Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 30–45, 2012.

[17] V.V. Arestov, P.Yu. Glazyrina. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *J. Approx. Theory*, 164(11):1501–1512, 2012.

[18] T. Bang. Une inégalite de Kolmogoroff et les fonctions presque-périodiques. *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd*, 19(4):28, 1941.

[19] S. Bernstein. *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.* Collection Borel. Gauthier-Villar, Paris, 1926.

[20] S. Bernstein. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, 2(4):1–103, 1912.

[21] A.I. Kozko. The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegö inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials. *East J. Approx*, 4(3):391–416, 1998.

[22] M. Riesz. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 23:354–368, 1914.

[23] M. Riesz. Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique. *C. R. Acad. Sci.*, 158:1152–1154, 1914.

[24] G. Wilmes. On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbb{R}^N$. *N. Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1(1):57–77, 1979.

Bernstein inequality for small-order fractional derivatives of trigonometric polynomials in the space L_0

Anastasia O. Leontyeva
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: trigonometric polynomial, Weyl derivative, Bernstein inequality.

Two-sided estimates are obtained for the best constant in the Bernstein inequality for fractional derivatives of small order of trigonometric polynomials in L_0.