

# Индукцированные шумом переходы в дискретной системе Калдора

Л.Б. Ряшко  
Lev.Ryashko@urfu.ru

А.А. Симонова  
Anna.Sysolyatina@urfu.ru

УрФУ (Екатеринбург)

## Аннотация

В ходе параметрического анализа дискретной системы Калдора были выявлены различные виды аттракторов: равновесия, кратные циклы, замкнутые инвариантные кривые, хаотические траектории. Подробно были изучены зоны, в которых эти аттракторы сосуществуют. В статье проанализировано воздействие случайных возмущений на дискретную систему в зонах мультистабильности.

Для описания разброса случайных состояний и анализа индуцированных шумом переходов между бассейнами притяжения аттракторов использовался метод функций стохастической чувствительности (ФСЧ). С помощью ФСЧ были построены доверительные эллипсы вокруг устойчивых детерминированных равновесий и кратных циклов, доверительные полосы – вдоль замкнутых инвариантных кривых. Также метод ФСЧ позволил определить уровень интенсивности вносимых случайных возмущений, при которых происходит переход между аттракторами.

## 1 Введение

В данной статье изучается воздействие случайных возмущений на макроэкономическую дискретную модель Калдора. В детерминированной системе присутствует нелинейность, вследствие которой в ней существуют и сосуществуют весьма разнообразные динамические режимы. Вносимые случайные возмущения существенно влияют на механизмы в экономических системах. Даже небольшой аддитивный шум приводит к значительным качественным изменениям нелинейной динамики таких систем.

В детерминированной модели Калдора присутствует несколько параметрических зон сосуществования различных аттракторов: двух устойчивых равновесий, равновесий и замкнутой инвариантной кривой, двух устойчивых циклов различной кратности, а также устойчивого цикла и хаотической траектории. Таким образом, в системе наблюдаются несколько типов мультистабильности. В зависимости от расположения начальной точки решение системы стремится к одному из аттракторов.

В данной статье основное внимание уделено параметрической зоне, где имеется два устойчивых положения равновесия. Для анализа поведения системы под действием шума используется метод стохастической чувствительности, который позволяет строить доверительные области, являющиеся наглядными геометрическими моделями для описания расположения случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов.

---

*Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.*

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at <http://ceur-ws.org>

## 2 Детерминированная система

Рассмотрим дискретную модель Калдора [1], описываемую системой двух уравнений:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= y_t + \alpha(-\gamma k_t + \arctg(y_t - \mu) + \sigma\mu(1 + \frac{\gamma}{\delta}) - \sigma y_t), \\ k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t - \gamma k_t + \arctg(y_t - \mu) + \sigma\mu(1 + \frac{\gamma}{\delta}). \end{aligned} \quad (1)$$

Первое уравнение в системе (1) описывает динамику дохода  $y$ , а второе уравнение — динамику капитала  $k$ . Параметр  $\alpha$  определяет скорость регулирования агрегированного рынка капитала и потребительских товаров. На остальные параметры системы наложены ограничения:  $\delta$  — норма амортизации основных фондов капитала,  $0 < \delta < 1$ ;  $\sigma$  — склонность к сбережению,  $0 < \sigma < 1$ ;  $\gamma$  — стоимость регулирования капитала до требуемого уровня,  $\gamma > 0$ ;  $\mu$  — ожидаемый уровень дохода,  $\mu > 0$ .

Мы исследовали динамику системы Калдора в зоне  $0 < \sigma < \frac{\delta}{\delta + \gamma}$ . В данной зоне система (1) имеет три равновесия:  $M_0, M_1, M_2$ , где  $M_1, M_2$  — устойчивые положения равновесия, симметричные относительно неустойчивого  $M_0$ . В данной работе зафиксированы параметры  $\sigma = 0.2$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\mu = 10$ . Оставшийся свободный параметр  $\alpha$ , задающий скорость адаптации, будет определять характер реализующегося в системе режима.

На рис. 1 представлены аттракторы системы. При переходе параметра  $\alpha$  слева направо в системе существуют два положения равновесия. При  $0 < \alpha < 1$  эти равновесия типа «устойчивый узел», а на интервале  $1 < \alpha < 2.1$  — «фокусы». В точке  $\alpha = 1.85835$  происходит седлоузловая бифуркация, жестко рождается замкнутая инвариантная кривая, которая сосуществует с двумя устойчивыми равновесиями.

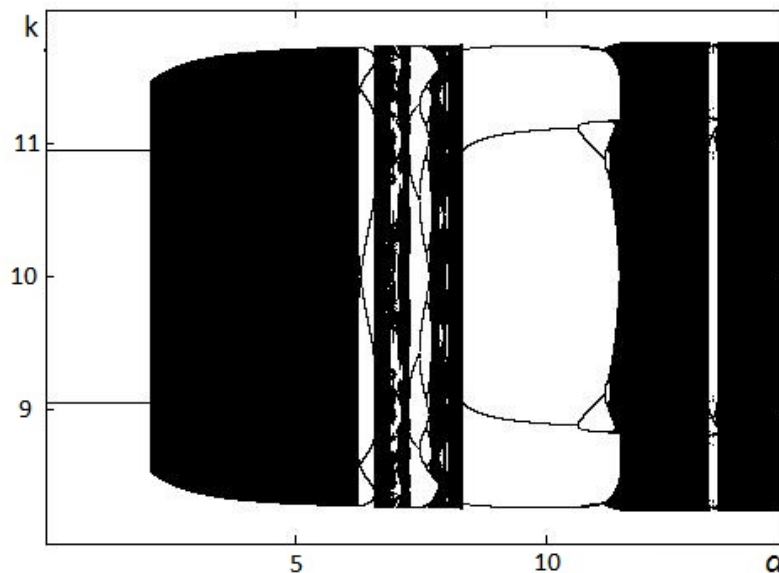


Рис. 1: Аттракторы детерминированной системы

В зонах  $1.858 < \alpha < 6.217$  наблюдаются замкнутые инвариантные кривые. По мере возрастания параметра  $\alpha$  замкнутые кривые видоизменяются, разрушаются, превращаясь в дискретные циклы, которые, в свою очередь, снова трансформируются в инвариантные кривые. В зоне  $6.22 < \alpha < 6.54$  наблюдается устойчивый восьмицикл, при  $7.24 < \alpha < 7.64$  — шестицикл, при  $\alpha = 7.61$ ,  $\alpha = 7.64$  происходят бифуркации удвоения кратности цикла. В зоне  $7.7 < \alpha < 8.3$  система имеет два сосуществующих аттрактора. Один из этих аттракторов — устойчивый четырехцикл, а второй меняет свой характер по мере возрастания параметра. Это может быть кратный цикл или хаотическая кривая, которая отличается от замкнутой инвариантной кривой наличием «ушек». В зависимости от положения начальной точки, решения притягиваются к тому или иному аттрактору.

В зоне  $8.32 < \alpha < 11.15$  система имеет четырехцикл. При прохождении точки бифуркации  $\alpha = 10.8$  траектория расщепляется на два устойчивых сосуществующих четырехцикла. После прохождения следующей точки бифуркации четырехциклы раздваиваются и образуют два сосуществующих восьмицикла, которые, в свою очередь, удваиваются. В зоне  $11.23 < \alpha < 11.25$  наблюдаются два сосуществующих 16-цикла.

По мере прохождения бифуркационных значений картина усложняется, затем цикл теряет устойчивость и следует область хаоса. Аттракторы в этом случае начинают выглядеть как множества, состоящие из сплошных интервалов. В этой зоне видны и просветы, в которых можно наблюдать кратные циклы. На интервале  $11.5 < \alpha < 11.55$  система имеет два сосуществующих цикла кратности шесть с последующим удвоением периода.

В работе подробно будут изучены зоны сосуществования устойчивых равновесий с замкнутой инвариантной кривой, шестикратного цикла с двумя семикратным, а также четырехкратного цикла с хаотической траекторией.

### 2.1 Сосуществование равновесий

Координаты  $\bar{y}$ ,  $\bar{k}$  равновесия системы (1) удовлетворяют уравнениям:

$$y = \mu + \frac{1}{\sigma(1 + \frac{\gamma}{\delta})} \operatorname{arctg}(y - \mu), \quad k = \frac{\sigma}{\delta} y. \quad (2)$$

При  $0 < \alpha < 1$  зоны притяжения равновесий  $M_1, M_2$  разделены сепаратрисой – прямой линией, проходящей через неустойчивое положение равновесия. При переходе через  $\alpha = 1$  сепаратриса видоизменяется – становится похожей на S-образную кривую. На рис. 2, слева, черным цветом показаны бассейны притяжения равновесия  $M_1$ , а белым –  $M_2$ .

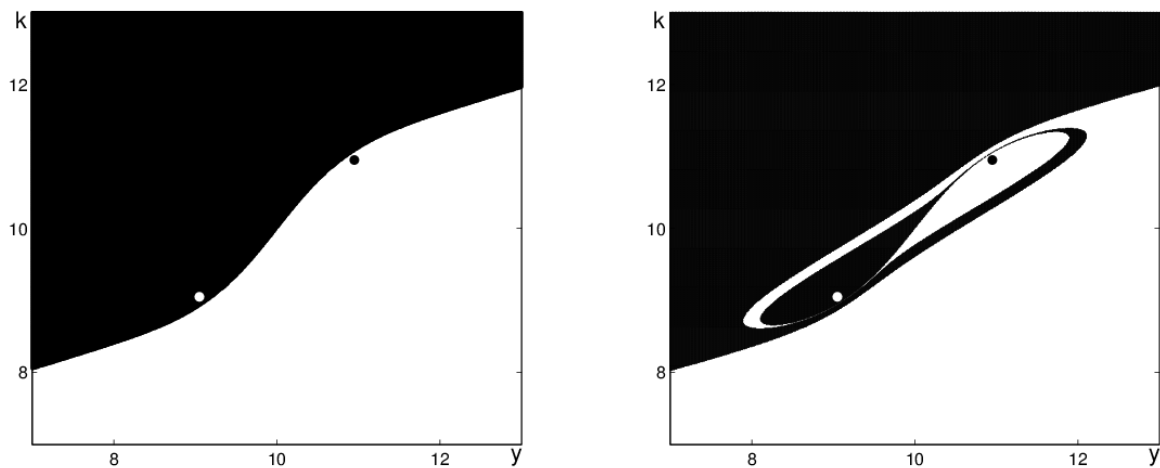


Рис. 2: Бассейны притяжения равновесий  $M_1, M_2$  при а)  $\alpha = 1.7$ , б)  $\alpha = 1.82$

С ростом параметра  $\alpha$  бассейны притяжения аттракторов начинают усложняться, закручиваясь вокруг равновесий до тех пор, пока сепаратриса, разделяющая бассейны притяжения, не самопересечется, тем самым образуя внешнюю границу бассейнов, которая является замкнутой кривой.

### 2.2 Сосуществование равновесий и замкнутой инвариантной кривой

В результате седлоузловой бифуркации жестко рождается замкнутая инвариантная кривая, бассейны притяжения устойчивых равновесий начинают уменьшаться с ростом параметра  $\alpha$ . На рис. 3, справа, черным цветом показана зона притяжения равновесия  $M_1$ , белым – равновесия  $M_2$ , серым – замкнутой инвариантной кривой, красным – сама кривая.

### 2.3 Сосуществование циклов различной кратности

При  $\alpha = 7.2$  замкнутая инвариантная кривая превращается в шестикратный цикл, который существует при  $7.2 < \alpha < 7.6$ . Когда цикл только появляется, он слабо устойчив. Вместе с ним сосуществуют два семикратных цикла. На рис. 4 зоны притяжения шестикратного цикла выделены цветом, зоны притяжения семикратного цикла показаны белым цветом. На рис. 4, слева, состояния устойчивого шестикратного цикла отмечены звездочками, а состояния семикратных – точками.

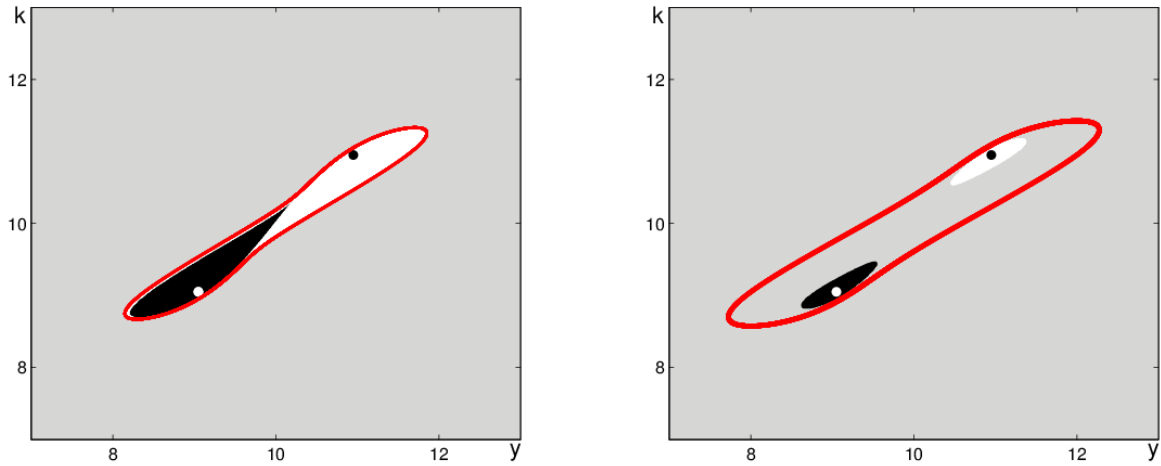


Рис. 3: Бассейны притяжения равновесий  $M_1, M_2$  и замкнутой инвариантной кривой при а)  $\alpha = 1.8584$ , б)  $\alpha = 2$

### 2.4 Сосуществование четырехцикла и хаотической траектории

При  $8.2 < \alpha < 11.15$  в системе наблюдается устойчивый четырехцикл. На левом конце интервала структурной устойчивости он сосуществует с хаотической траекторией. На рис. 4, справа, серым цветом выделены зоны притяжения состояний четырехцикла, а белым — хаотической траектории.

## 3 Стохастическая модель

Функционирование любой экономической системы часто сопровождается внешними (аддитивными) случайными возмущениями. Присутствие случайного фактора приводит к деформации режимов динамического поведения исходной детерминированной модели. В присутствии шума тонкая структура детерминированных аттракторов размывается.

Рассмотрим стохастическую систему:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= y_t + \alpha(-\gamma k_t + \arctg(y_t - \mu) + \sigma\mu(1 + \frac{\gamma}{\delta}) - \sigma y_t) + \varepsilon \xi_{1,t}, \\ k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t - \gamma k_t + \arctg(y_t - \mu) + \sigma\mu(1 + \frac{\gamma}{\delta}) + \varepsilon \xi_{2,t}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi_{1,t}, \xi_{2,t}$  — последовательности независимых гауссовых случайных величин со следующими свойствами:  $E\xi_{1,t} = E\xi_{2,t} = 0$ ,  $E\xi_{1,t}^2 = E\xi_{2,t}^2 = 1$ ,  $E\xi_{1,t}\xi_{2,t} = 0$ , а  $\varepsilon$  — интенсивность шумов.

Аттракторы стохастической системы при различной интенсивности внешнего воздействия изображены на рис. 5.

Как видно из рис. 5, разброс случайных состояний системы (2) неоднороден. Характер разброса случайных состояний зависит от параметров системы. На рис. 5 наблюдается различие в разбросе случайных состояний вокруг точек равновесия, а также вокруг точек кратных циклов. В случае существования двух положений равновесия дисперсия рассеивания на концах интервала структурной устойчивости увеличивается, а при приближении к середине — уменьшается. В случае четырехцикла средние ветки размываются сильнее крайних. Детальный анализ указанных особенностей зависимости разброса траекторий для различных точек аттрактора от параметра  $\alpha$  может быть проведен с помощью метода функции стохастической чувствительности (ФСЧ).

На рис. 6, слева, представлены графики собственных чисел матрицы стохастической чувствительности  $W$  для равновесий  $M_1, M_2$  системы в зависимости от параметра  $\alpha$ . Эти равновесия симметричны относительно неустойчивого равновесия, поэтому соответствующие им матрицы стохастической чувствительности равны. На рис. 6, справа, изображено изменение чувствительности вдоль кривой.

Проведем анализ влияния случайных возмущений на динамику системы с помощью аппарата ФСЧ, описанного в [2]. В результате действия шумов случайные траектории системы покидают детерминированный

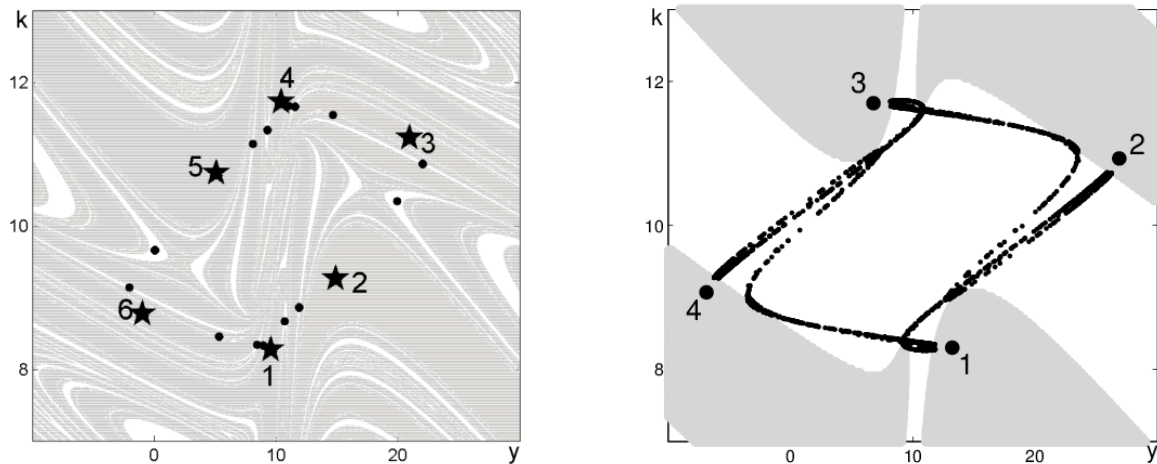


Рис. 4: Бассейны притяжения точек кратных циклов при а)  $\alpha = 7.3$ , б)  $\alpha = 8.3$

аттрактор и формируют некоторый стохастический аттрактор. При увеличении интенсивности шумового воздействия разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора увеличивается.

Опираясь на метод ФСЧ [3], вокруг детерминированных аттракторов построим области, в которые с заданной вероятностью будут попадать стохастические состояния. Для равновесия и кратных циклов данными областями являются эллипсы, а для замкнутой инвариантной кривой – полоса.

На рис. 7 представлены стохастические состояния, эллипсы рассеивания с доверительной вероятностью  $P = 0.99$ . В случае равновесий и кратных циклов форма эллипса зависит от собственных чисел и векторов соответствующей матрицы стохастической чувствительности  $W$ . Собственные векторы задают направление осей эллипса, а собственные значения – их величину. Если собственные числа совпадают, то доверительной областью является окружность. Это значит, что отклонения случайных состояний от детерминированного равновесия будут равновелики по обеим осям координат. В случае когда собственные значения разные, эллипс вытягивается больше вдоль собственного вектора, соответствующего большему собственному значению.

На рис. 8 изображены стохастические состояния и доверительная полоса с вероятностью  $P = 0.99$ . Ширина полосы зависит от интенсивности вносимого шума и неравномерна вдоль замкнутой инвариантной кривой. Участки кривой, более или менее чувствительные к вносимому шуму, распознаются функцией стохастической чувствительности и, как следствие, полоса на этих участках шире или уже.

#### 4 Индуцированные шумом переходы

При малых интенсивностях шумового воздействия случайные состояния системы с некоторой доверительной вероятностью не попадают в зону притяжения другого аттрактора. То есть, пока случайные состояния остаются внутри бассейна притяжения, переходов между стохастическими аттракторами не происходит.

При больших интенсивностях происходит переход между аттракторами. Это значит, что при запуске траектории из зоны притяжения одного равновесия случайные состояния попадают в зону притяжения другого аттрактора, находятся там некоторое время, пока вновь не попадут в бассейн притяжения своего аттрактора.

В случае сосуществования аттракторов вид переходов различен в зависимости от типа соответствующего детерминированного аттрактора. Если детерминированные аттракторы имеют тип «устойчивый узел», то переход происходит по кривой, связывающей эти аттракторы. Если аттракторы детерминированной системы являются устойчивыми фокусами, переход между равновесиями происходит по кривой, напоминающей замкнутую инвариантную кривую [4].

Аналогичные результаты получены для всех зон мультистабильности. Переход между аттракторами можно увидеть на рис. 9, где показана генерация случайных колебаний состояний системы при  $\alpha = 1.8$ ,

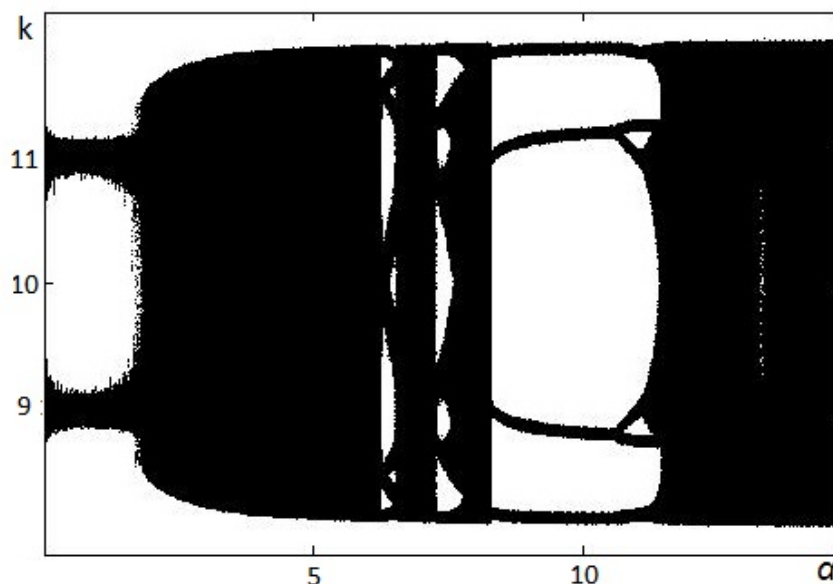


Рис. 5: Аттракторы стохастической системы

$\varepsilon = 0.02$ . Сначала случайные колебания происходят вдоль замкнутой инвариантной кривой, затем состояния системы попадают в зону притяжения другого аттрактора – равновесия. Метод ФСЧ помогает определить критические значения интенсивности, при которых произойдет переход [5]. Переходы происходят, когда доверительные эллипсы задевают сепаратрисы между зонами притяжений различных аттракторов. На рис. 9, слева, изображены границы эллипса и полосы. В момент, когда эллипс попадает в зону притяжения другого аттрактора, происходит переход. Аналогичные ситуации происходят и в других зонах мультистабильности.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (постановление № 211, контракт № 02.A03.21.0006)

### Список литературы

- [1] Bischi G.I., Dieci R., Rodano G., Saltari E. Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle model. *Journal of Evolutionary Economics*, 11(5):527-554, 2001.
- [2] Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect. *Chaos*, 21(21):047514, 2011.
- [3] Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, 17: 501–515, 2010.
- [4] Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 410:236-243, 2014.
- [5] Bashkirtseva I., Ryashko L., Sysolyatina A. Analysis of stochastic effects in Kaldor-type business cycle discrete model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 36: 446–456, 2016.

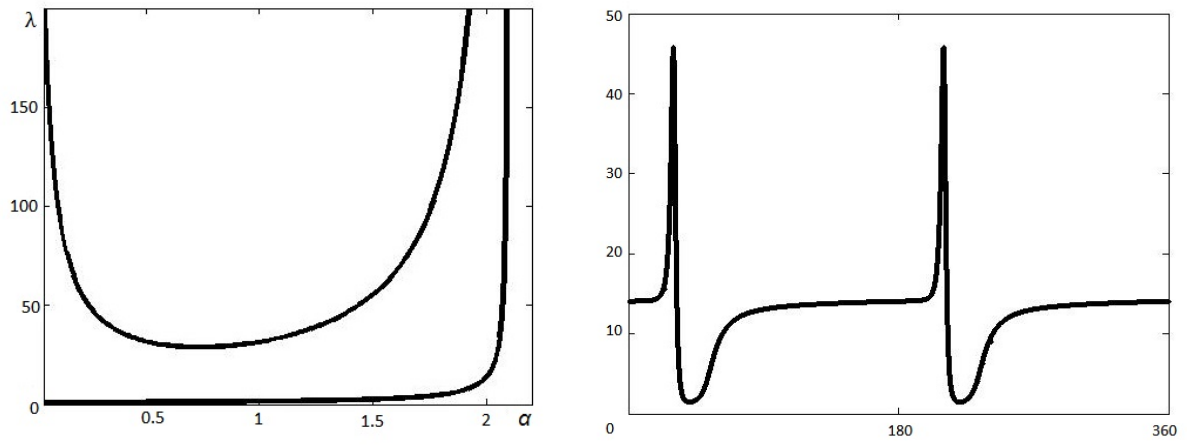


Рис. 6: Собственные числа матрицы стохастической чувствительности а) для равновесия, б) для замкнутой инвариантной кривой

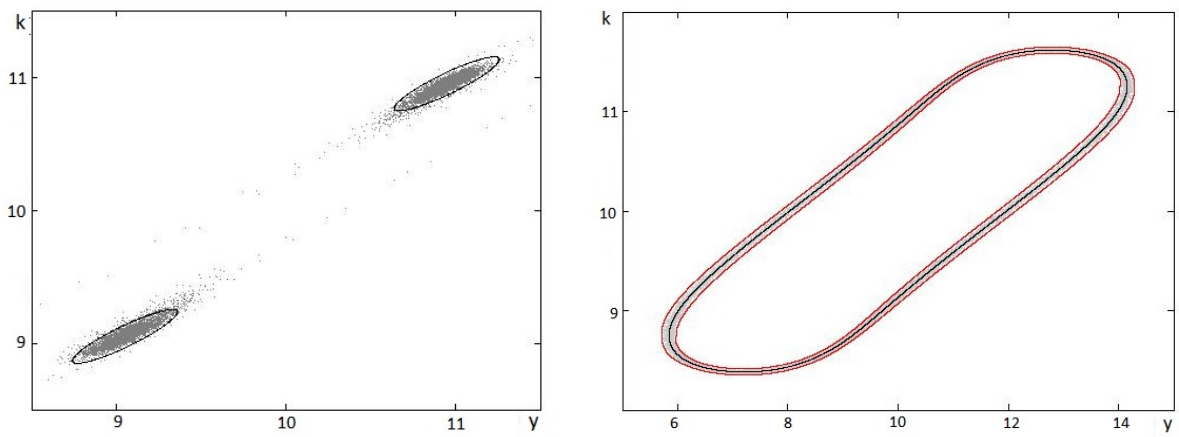


Рис. 7: Состояния стохастической системы

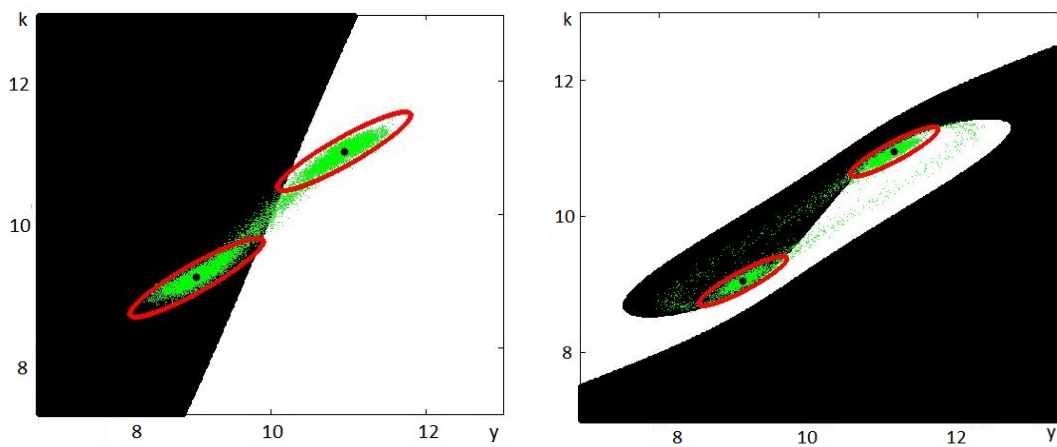


Рис. 8: Стохастические аттракторы

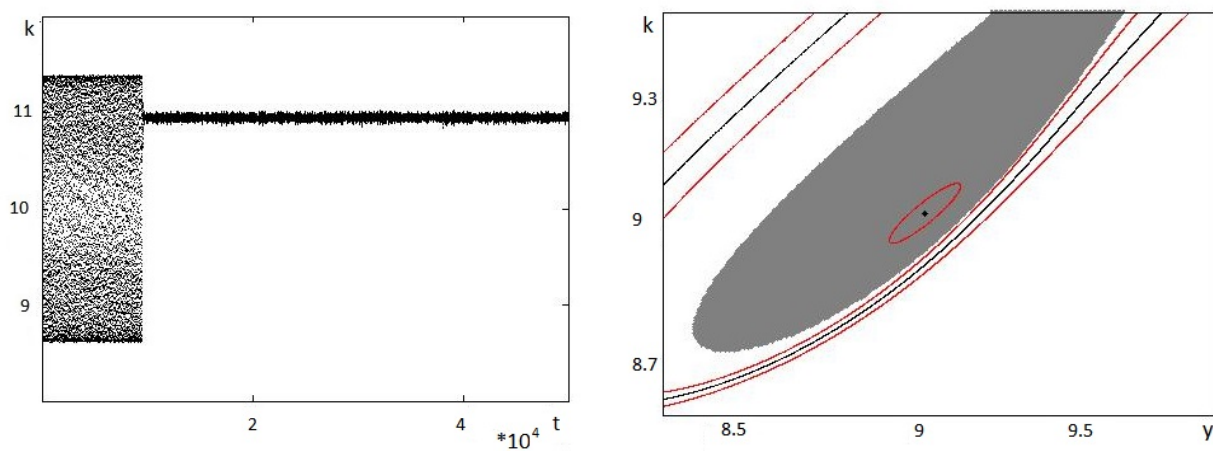


Рис. 9: Слева: генерация случайных колебаний при переходе от замкнутой инвариантной кривой к равновесию, справа: касание доверительной полосы зоны притяжения равновесия



# Noise-induced transitions in a discrete Kaldor system

*Lev Ryashko, Anna Simonova*

Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

**Keywords:** noise-induced transitions, Kaldor system, stochastic sensitivity analysis.

The parametric analysis of the discrete Kaldor system revealed that the model has different types of attractors: equilibrium, multiple cycles, closed invariant curves, chaotic trajectory. Details have been investigated in the zone of coexistence of attractors. The article analyzes the impact of random disturbances on the system in discrete zones multistability.

We used technique of stochastic sensitivity function to describe the random variation of states and to analyze noise-induced transitions between the basins of attraction. Using FSS, we constructed confidence ellipses around deterministic stable equilibria and multiple cycles. Also, it was used to find confidence bands along the closed invariant curves. The FSS technique allowed us to determine the intensity level of insertion of random disturbances in which there is a transition between attractors.