

Тархов Д.А., Шершнева Е.А.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МАТЬЁ,
ПОСТРОЕННЫЕ НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ***

АННОТАЦИЯ

На примере уравнения Матьё рассматриваются методы построения многослойных приближённых решений дифференциальных уравнений, основанные на классических приближённых методах. В отличие от классических подходов в результате предложенных методов получается не поточечные приближения, а приближённое решения в виде функций. Работа методов проверена на ряде вычислительных экспериментов. Рассмотрен подход, основанный на сочетании классических и нейросетевых методов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Нейронные сети; приближенные решения; дифференциальные уравнения, уравнение Матьё.

Dmitry Tarkhov, Ekaterina Shershneva

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

**APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON
CLASSICAL NUMERICAL METHODS**

ABSTRACT

Methods of construction of multi-layer approximate solutions of differential equations, based on the classical approximate methods are discussed (the example of Mathieu equation). In contrast to classical approaches, a result of the proposed methods is not that pointwise approximation, it is approximate solutions in the form of functions. Work of methods tested on a number of computational experiments. Approach based on a combination of classical and neural network techniques was discussed.

KEYWORDS

Neural networks; approximate solution; differential equations.

Здесь $\Phi(t)$ – периодическая функция возбуждения, ω_0^2 - квадрат частоты собственных колебаний, μ - коэффициент возбуждения, q - обобщённая координата, ε - коэффициент вязкого трения. Уравнение (2) сводится к уравнению (1) путём подстановки $q(t) = u(t)e^{-\varepsilon t}$, где функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$u''(t) + \omega_0^2 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} + 2\mu\Phi(t) \right] u(t) = 0.$$

Также уравнение Матьё достаточно часто используются в радиотехнике. Например, для расчёта токов в параметрических генераторах (системах). В параметрических генераторах и усилителях механизм передачи энергии (или, как его называют, накачки) оказывается таким: энергия вводится в систему путем изменения с некоторой частотой реактивного параметра, на что какой-то источник затрачивает энергию. Поскольку параметр меняется с одной частотой, возбуждаемые или усиливаемые колебания в большинстве случаев имеют другую частоту, параметрические устройства оказываются преобразователями энергии переменного тока одной частоты в энергию колебаний другой частоты [1]. Рассмотрим один из контуров параметрического генератора. Заряд в контуре изменяется по закону:

* Труды XI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (SITITO'2016), Москва, Россия, 25-26 ноября, 2016

$$q''(t) + \left(\frac{r}{L}\right)q'(t) + \omega_0^2(1 + m\cos 2\omega)q = 0. \quad (3)$$

Можно преобразовать (3) в (1), чтобы воспользоваться известными сведениями из теории уравнения Матъё для установления свойств рассматриваемой параметрической системы.

Для исследования решений уравнения Матъё (так же, как и для исследования решений многих других уравнений) применяются три принципиально разных подхода. Первый подход заключается в качественном исследовании решений уравнения (1), опираясь на его тип и свойства правой части. Второй подход состоит в получении различного рода асимптотик и разложений в степенные ряды, которые позволяют получить аналитические выражения, являющиеся приближёнными решениями (1). Третий подход состоит в численном решении (1) для некоторого набора параметров. Множества параметров и точек, для которых вычисляется приближённое значение решения, должны быть достаточно представительными для целей исследования.

В данной работе показано, что второй и третий подходы можно совместить. Такое совмещение продемонстрировано на примере уравнения Матъё, но без труда переносится на другие подобные задачи.

Методы и результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

на промежутке $[x_0, x_0 + a]$. Для её решения можно применить уточнённый метод Эйлера [7]. Разделим данный промежуток на интервалы длины $h_k, k = 1, \dots, n$ и применим рекуррентную формулу [7]:

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(x_k, y_k), \text{ при этом } y_1 = y_0 + h_1 f(x_0 + \frac{h_1}{2}, y_0 + \frac{h_1}{2} f(x_0, y_0)).$$

Если мы применим этот метод к интервалу с переменным верхним пределом $[x_0, x] \subset [x_0, x_0 + a]$ (при этом $h_k = h_k(x)$), то в результате применения этой (или подобной) формулы получим функцию $y_n(x)$, которую можно считать приближённым решением уравнения (1). Для равномерной оценки точности такой формулы можно применить обычные оценки точности соответствующего численного метода.

Далее приведены результаты вычислительных экспериментов для уравнения (1) в случае, когда

$q = 1, x_0 = 0, y(x_0) = 1, y'(x_0) = 0$. Разбиение интервала считаем равномерным, т.е. $h_k = x/n$.

Для $n = 2$ применением уточнённого метода Эйлера, получаем формулу $y_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 \left(\alpha + \cos \left[\frac{x}{2} \right] \right)$. Графики данного приближённого решения и решения, построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10 при $\alpha = 0.5; 1$ и 1.5 и $x \in [0, 1]$ выглядят следующим образом:

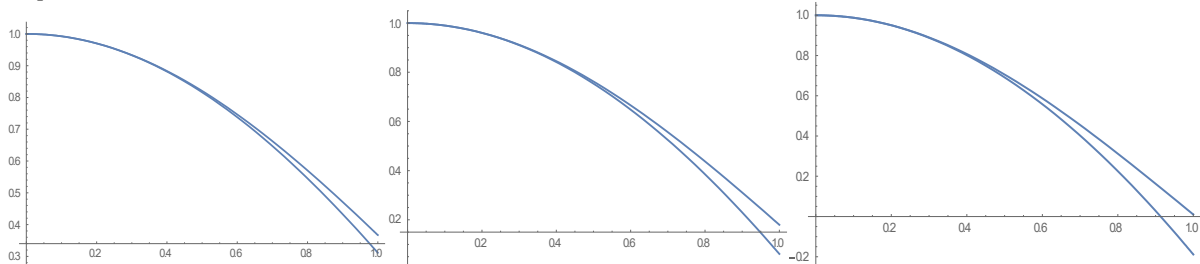


Рис. 1. Графики $1 - \frac{1}{2}x^2 \left(\alpha + \cos \left[\frac{x}{2} \right] \right)$ и приближённого решения, построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10 при $\alpha = 0.5; 1$ и 1.5

Для $n = 6$ применением уточнённого метода Эйлера, получаем формулу

$$y_6(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2 \left(\alpha + \cos \left[\frac{x}{4} \right] \right) + \frac{1}{2}x \left(-\frac{1}{4}x \left(\alpha + \cos \left[\frac{x}{4} \right] \right) - \frac{1}{2}x \left(1 - \frac{1}{8}x^2 \left(\alpha + \cos \left[\frac{x}{4} \right] \right) \right) \right) \left(\alpha + \cos \left[\frac{x}{2} \right] \right). \quad (4)$$

$$x^2 \cos\left[\frac{2x}{5}\right] + x^2 \cos\left[\frac{x}{10}\right] (1875 - 100x^2\alpha + x^4\alpha^2 + x^2(-50 + x^2\alpha)\cos\left[\frac{x}{5}\right] + x^2(-50 + x^2\alpha)\cos\left[\frac{2x}{5}\right] + \frac{1}{8}x^6 \cos\left[\frac{x}{10}\right] \sin\left[\frac{4x}{5}\right])$$

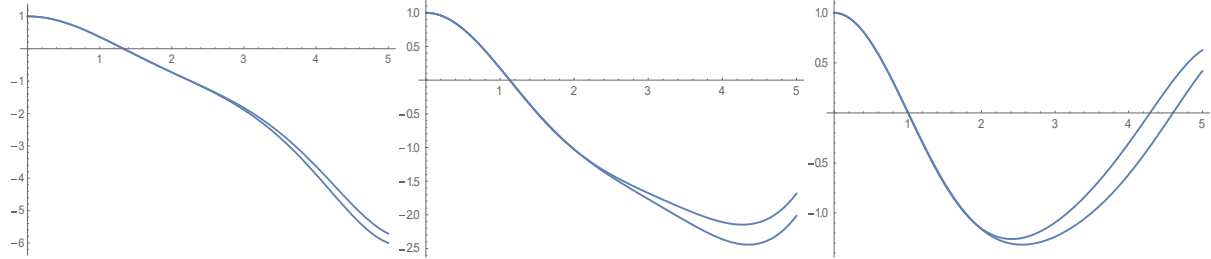


Рис. 4. Графики $y_{10}(x)$ и приближённого решения, построенного с помощью Mathematica 10 при $\alpha = 0.5; 1$ и 1.5 для интервала $x \in [0, 5]$

Рассмотрим приближённые аналитические решения, получаемые с помощью специально предназначенного для уравнений второго порядка метода Штёрмера [7]. Пусть дано уравнение $y''(x) = f(x, y)$. Простейший вариант метода Штёрмера, который мы будем далее использовать, состоит в применении рекуррентного соотношения $y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + h^2 f(x_k, y_k)$, $h = x/n$.

При $n=2$ получаем формулу $y_2(x) = 1 - 0.25x^2 \left((1+\alpha) - (1 - 0.125x^2(1+\alpha))(\alpha + \cos\left[\frac{x}{2}\right]) \right)$;

Графики данного приближённого решения и решения, построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10 при $\alpha=0.5; 1; 1.5$, выглядят следующим образом:

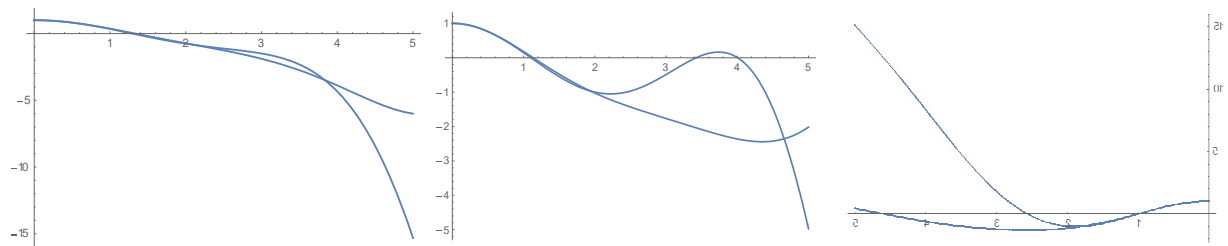


Рис. 5. Графики $1 - 0.25x^2 \left((1+\alpha) - (1 - 0.125x^2(1+\alpha))(\alpha + \cos\left[\frac{x}{2}\right]) \right)$ и приближённого решения, построенного с помощью Mathematica 10 при $\alpha = 0.5; 1$ и 1.5 для интервала $x \in [0, 5]$

Графики приближённого решения, построенного по методу Штёрмера при $n=6$ и решения, построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10 при $\alpha=0.5; 1; 1.5$ выглядят следующим образом:

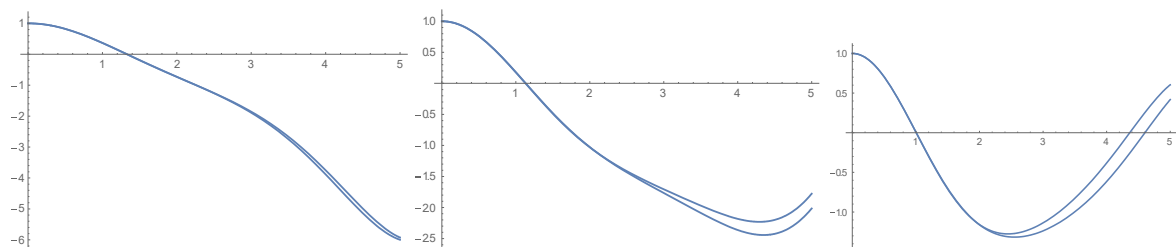


Рис. 6. Графики приближённого решения, построенного по методу Штёрмера при $n=6$ и приближённого решения, построенного с помощью Mathematica 10 при $\alpha=0.5; 1; 1.5$

Расширение интервала требует увеличения числа функций. Приведём графики для интервала $[0; 10]$.

Графики решения, построенного по методу Штёрмера при $n=14$ и с помощью встроенной операции Mathematica 10 при $\alpha=0.5; 1; 1.5$ выглядят следующим образом:

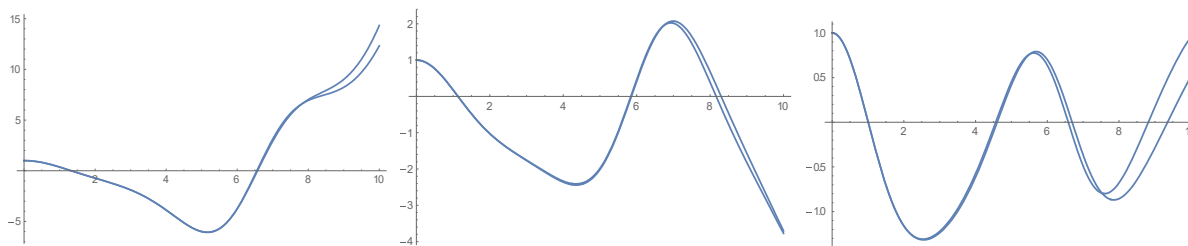


Рис. 7. Графики приближённого решения, построенного по методу Штёрмера при $n=14$ и приближённого решения, построенное с помощью Mathematica 10 при $\alpha=0.5;1;1.5$

Дальнейшее развитие и выводы

Первое перспективное направление развития связано с аппроксимацией степеней x и функции $\cos(x)$ нейронными сетями. В результате решение приближается многослойной нейросетевой функцией, которую можно реализовать в виде нейрочипа для ускорения вычислений.

Второе направление получается при оптимизации выбора шагов $h_k(x)$. Простейший вариант получается, если выбрать $h_k(x) = h_k x$. При этом h_k находят исходя из минимизации подходящего функционала ошибки [6]. Более продвинутый вариант получается, если $h_k(x)$ искать как некоторые нейросетевые функции, веса которых подбираются оптимизацией упомянутых выше функционалов.

В качестве определения границ возможностей запишем приближённое решение, которое получается применением стандартного метода Эйлера [10] с двумя шагами $h(x)$ и $x - h(x)$. Тогда в качестве приближённого решения получится функция $y_2(x) = 1 - h(x)(1 - h(x))x^2(\alpha + q)$. Возникает вопрос подбора $h(x)$, для которой ошибка минимальна. Графики подобной функции $h(x)$ для $q = 1$ приведены ниже.

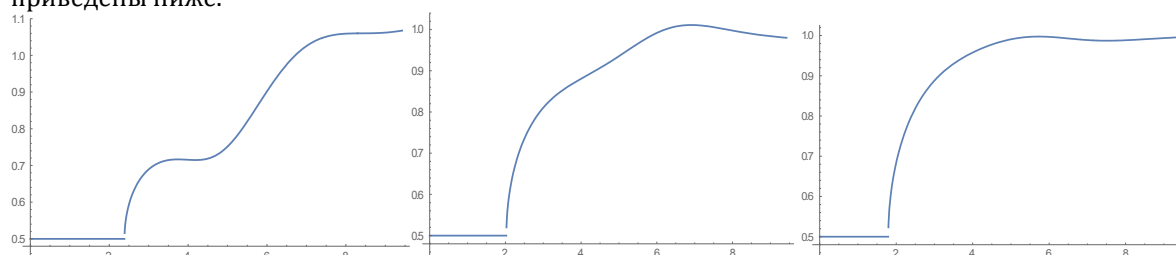


Рис. 8. Графики оптимального $h(x)$ при $\alpha=0.5;1;1.5$

В силу известного свойства нейросетевых функций как оптимального аппроксиматора функция $h(x, \alpha)$ может быть сколь угодно точно приближена нейронной сетью использованием методов [6]. Соответствующие графики для решений приведены ниже

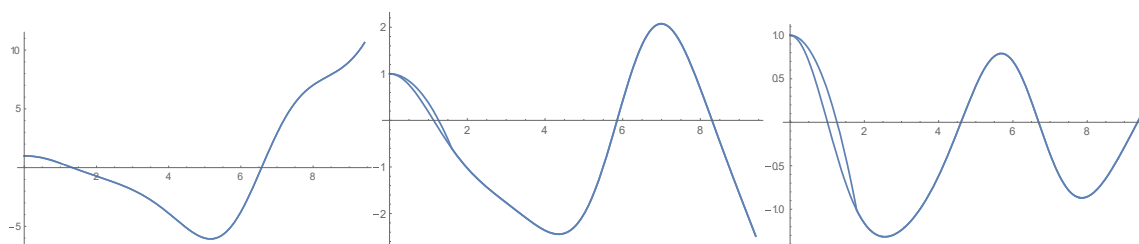


Рис.9. Графики приближённого решения, построенного по методу Эйлера с оптимальным шагом при $n=2$ и приближённого решения, построенное с помощью Mathematica 10 при $\alpha=0.5;1;1.5$

В качестве вывода укажем, что представленный в данной работе подход обладает очень широким множеством возможностей для построения приближённых аналитических решений важных практических задач и реализации этих решений в виде нейрочипов. Границы применимости предложенного метода пока трудно представить.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №14-01-00660 и №14-01-00733).

Литература

1. Андреев В. С. Теория нелинейных электрических цепей. Учебное пособие для вузов. 1982. - 280 с. С.225-234.
2. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Гибридный метод построения параметрической нейросетевой модели катализатора // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – М.: ИНТУИТ.РУ, 2014. Т.1. №1(9). С.476–484.
3. Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. Модель неизотермического химического реактора на основе параметрических нейронных сетей. Гибридный метод // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – М.: ИНТУИТ.РУ, 2015. Т.2. №11. – С.271–278.
4. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Многоуровневые модели окружающей среды в мегаполисах // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – М.: ИНТУИТ.РУ, 2015. Т. 2. № 11. – С. 267-270.
5. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Мезо-уровневая нейросетевая модель загрязнения атмосферного воздуха Санкт-Петербурга по данным мониторинга // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – М.: ИНТУИТ.РУ, 2015. Т. 2. № 11. – С. 279-283.
6. Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. Нейросетевой подход к задачам математической физики. – СПб.: «Нестор-История», 2015. – 260 с.
7. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Оникс 21 век, 2005. – 400с.
8. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем.— М.: Мир, 1982.— 304 с. С.165-170.
9. Романова А.Г., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. О применении нейросетевых моделей в экологии «Соврем. Информац. технологии и ИТ-образование». – М.: ИНТУИТ.РУ, 2013, Т.1. № 1(8). – С.534 –539.
10. Челомей В.Н. (пред.). — М.: Машиностроение, 1978 — Т. 1. Колебания линейных систем/Под ред. В. В. Болотина. 1978. - 352 с.
11. Budkina E. M., Kuznetsov E. B., Lazovskaya T. V., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISSN 2016, LNCS 9719. – pp. 277–283, 2016
12. Gorbachenko V. I., Lazovskaya T. V., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N., Zhukov M.V. Neural Network Technique in Some Inverse Problems of Mathematical Physics // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISSN 2016, LNCS 9719. – pp. 320–316, 2016
13. Kainov, N.U., Tarkhov, D.A., Shemyakina, T.A. Application of neural network modeling to identification and prediction problems in ecology data analysis for metallurgy and welding industry // Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2014. vol. 17, 1. – pp. 57-63
14. Lazovskaya, T.V., Tarkhov, D.A.: Fresh approaches to the construction of parameterized neural network solutions of a stiff differential equation. St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.sjppm.2015.07.005>
15. Shemyakina T. A., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISSN 2016, LNCS 9719. – pp. 547–554, 2016
16. Tarkhov D, Vasilyev A 2005 New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. I: Simple problems Optical Memory and Neural Networks (Information Optics) 14. – pp.59-72
17. Tarkhov D, Vasilyev A. 2005 New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. II: Complicated and nonstandard problems Optical Memory and Neural Networks (Information Optics) 14. – pp.97-122.
18. Vasilyev A., Tarkhov D. Mathematical Models of Complex Systems on the Basis of Artificial Neural Networks // Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2014. vol. 17, 2. – pp.327-335.

References

1. Andreev V. S. Teoriya nelineynykh ehlektricheskikh cepej: Uchebnoe posobie dlya vuzov. 1982. - 280 s. S.225-234.
2. Vasil'ev A.N., Tarhov D.A., SHemyakina T.A. Gibridnyj metod postroeniya parametricheskoj nejrosetevoj modeli katalizatora // Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovanie. – М.: INTUIT.RU, 2014. Т.1. №1(9). С.476–484.
3. Vasil'ev A. N., Tarhov D. A., SHemyakina T. A. Model' neizotermicheskogo himicheskogo reaktora na osnove parametricheskikh nejronnykh setej. Gibridnyj metod // Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovanie. – М.: INTUIT.RU, 2015. Т.2. №11. – С.271–278.
4. Vasil'ev A.N., Tarhov D.A., SHemyakina T.A. Mnogourovnevye modeli okruzhayushchej sredy v megapolisah Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovanie. – М.: INTUIT.RU, 2015. Т. 2. № 11. – С. 267-270.
5. Vasil'ev A.N., Tarhov D.A., SHemyakina T.A. Mezo-urovnevaya nejrosetevaya model' zagryazneniya atmosfernogo vozduha Sankt-Peterburga po dannym monitoringa // Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovanie. – М.: INTUIT.RU, 2015. Т. 2. № 11. – С. 279-283.
6. Vasil'ev A. N., Tarhov D. A., SHemyakina T. A. Nejrosetevoj podhod k zadacham matematicheskoy fiziki. – SPb.: «Nestor-Istoriya», 2015. – 260 s.
7. Verzhbickij V.M. Chislennyye metody. Matematicheskij analiz i obyknovennyye differencial'nye uravneniya. – М.: Oniks 21 vek, 2005. – 400s.
8. Magnus K. Kolebaniya: Vvedenie v issledovanie kolebatel'nykh sistem. Per. s nem.— М.: Mir, 1982.— 304 s. S.165-170.
9. Romanova A.G., Tarhov D.A., SHemyakina T.A. O primenenii nejrosetevykh modelej v ehkologii «Sovrem. Informac. tekhnologii i IT-obrazovanie». – М.: INTUIT.RU, 2013, Т.1. № 1(8). – С.534 –539.
10. Shelomej V.N. (pred.). — М.: Mashinostroenie, 1978 — Т. 1. Kolebaniya linejnykh sistem/Под ред. В. В. Болотина. 1978. - 352с.
11. Budkina E. M., Kuznetsov E. B., Lazovskaya T. V., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISSN 2016, LNCS 9719. – pp. 277–283, 2016.
12. Gorbachenko V. I., Lazovskaya T. V., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N., Zhukov M.V. Neural Network Technique in Some Inverse Problems of Mathematical Physics // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISSN 2016, LNCS 9719. – pp. 320–316, 2016.

13. Kainov, N.U., Tarkhov, D.A., Shemyakina, T.A. Application of neural network modeling to identification and prediction problems in ecology data analysis for metallurgy and welding industry // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2014. vol. 17, 1. – pp. 57-63.
14. Lazovskaya, T.V., Tarkhov, D.A.: Fresh approaches to the construction of parameterized neural network solutions of a stiff differential equation. *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics* (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.spjpm.2015.07.005>.
15. Shemyakina T. A., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): *ISNN 2016, LNCS 9719*. – pp. 547–554, 2016.
16. Tarkhov D, Vasilyev A 2005 New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. I: Simple problems *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)* 14. – pp.59-72.
17. Tarkhov D., Vasilyev A. 2005 New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. II: Complicated and nonstandard problems *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)* 14. – pp.97-122.
18. Vasilyev A., Tarkhov D. *Mathematical Models of Complex Systems on the Basis of Artificial Neural Networks* // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2014. vol. 17, 2. – pp.327-335.

Поступила: 15.10.2016

Об авторах:

Тархов Дмитрий Альбертович, доктор технических наук, профессор кафедры высшая математика Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУ ВО «СПбПУ»), dtarkhov@gmail.com;

Шершнева Екатерина Андреевна, студент кафедры механика и процессы управления Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУ ВО «СПбПУ»), katya_sh@mail333.com.