Об исследовании устойчивости по части переменных в критическом случае двух нулевых корней

А.А. Карасёв
xxfist@gmail.com

А.Е. Ламоткин
alexeylamotkin@yandex.ru

Уральский федеральный университет (Екатеринбург)

Аннотация

В работе исследована устойчивость относительно части переменных в случае двух нулевых корней. Показана возможность модификации методов, используемых в теории устойчивости по всем переменным, для случая устойчивости по части переменных. С помощью предложенных подходов получены частные условия устойчивости и неустойчивости для случая двойного нулевого корня с одной и двумя группами решений.

Ключевые слова: устойчивость относительно части переменных; критический случай; функция Ляпунова; прямой метод Ляпунова.

1 Введение

Одной из важных задач при анализе различных динамических систем является исследование устойчивости решений в смысле Ляпунова. Более широкой постановкой задачи является устойчивость решения не по всем переменным, а относительно части переменных. Решение этой задачи во многих случаях облегчается возможностью провести исследования, используя только линейные части уравнений возмущенного движения, однако, существует целый класс случаев, названных критическими, при которых нельзя ограничиваться лишь линейными приближениями, а следует учитывать члены более высоких порядков.

Вопрос об исследовании критических случаев в теории устойчивости, является одним из самых сложных и сопряжен с огромными трудностями. Впервые критические случаи были исследованы А.М. Ляпуновым в работе [5]. В работе [4] Ляпунов подробно исследует критический случай двойного нулевого корня с одной группой решений. Большой вклад в исследование критических случаев внесли И.Г. Малкин [6, 7] и Г.В. Каменков [2].

Все вышеперечисленные работы рассматривают вопрос устойчивости по отношению ко всем переменным, но как заметил А.М. Ляпунов, можно рассмотреть более общую задачу устойчивости, по отношению только к некоторым из переменных, однако, сам А.М. Ляпунов данной задачей не занимался. В 1938 г. такой постановкой вопроса заинтересовался И.Г. Малкин, он сумел перенести (без доказательства) некоторые результаты теории устойчивости на случай устойчивости относительно части переменных.

Большой вклад в развитие теории устойчивости по части переменных внес В.В. Румянцев, который конкретизировал постановку задачи, а также доказал основные теоремы, более того им были указано практическое приложение полученной теории для изучения устойчивости космических аппаратов. Позднее было открыто множество других приложений данной теории, в том числе проектирование самонастраивающихся

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

систем с минимальным фазовым рассогласованием по отношению к эталонной модели [1]. Таким образом становится очевидной практическая важность теории устойчивости по части переменных.

Как и в случае устойчивости по всем переменным, в теории устойчивости по части переменных важное значение имеет устойчивость по первому приближению и теория критических случаев. Устойчивость по первому приближению исследовалась в работах А.С. Озиранера, В.П. Прокопьева, некоторые из критических случаев были исследованы в работах В.П. Прокопьева [8], М.Г. Лизуновой [3], В.Н. Щенникова [10, 11].

В данной работе авторы рассматривают возможность исследования задачи об устойчивости относительно части переменных в случае двух нулевых корней (её постановка дается в п.2), используя модификации методов теории устойчивости по всем переменным. Так в п.3 исследуется устойчивость по части переменных в случае двойного нулевого корня с двумя группами решений с использованием модификации метода, предложенного И.Г. Малкиным [7] для случая устойчивости относительно всех переменных с построением двух форм G и P, и формулируется утверждение, которое даёт условия устойчивости и неустойчивости в зависимости от знака P на поверхностях определяемых уравнением $G=0$. В п.4 для случая двойного корня с одной группой решений, используется метод подбора знакоопределенной формы для получения условия неустойчивости. В п.5 приводятся основные результаты.

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_{n+2}),\ i = \overline{1, n+2}.$$

Будем предполагать, что функции X_i $(i = \overline{1, n+2})$, раскладываются в ряды по степеням x_i $(i = \overline{1, n+2})$, которые сходятся в области:

$$|x_i| \leq \lambda,\ i = \overline{1, n+2}, \tag{1}$$

где λ – некоторая положительная постоянная.

Тогда уравнения возмущенного движения могут быть переписаны в виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{i,n+2}x_{n+2} + X_i^*(x_1, \ldots, x_{n+2}),\ i = \overline{1, n+2}, \tag{2}$$

где q_{ij} $(i = \overline{1, n+2},\ j = \overline{1, n+2})$ – постоянные, X_i^* $(i = \overline{1, n+2})$ - функции переменных x_i, которые раскладываются по ним в степенные ряды в области (1), причём разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Отбросив в уравнениях (2) члены, порядок которых выше двух, получим систему уравнений линейного приближения

$$\frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{i,n+2}x_{n+2},\ i = \overline{1, n+2}. \tag{3}$$

предположим, что характеристическое уравнение этой системы имеет нулевой корень кратности два, а также l $(0 \leq l < n)$ корней с отрицательной действительной частью, остальные корни характеристического уравнения предполагаются произвольными.

Будем различать два возможных случая: первый – ранг матрицы системы (3) равен n, в этом случае нулевому корню будет соответствовать две группы решений, второй – ранг матрицы системы (3) равен n+*1*, тогда нулевому корню соответствует одна группа решений.

Система (2) при помощи подходящей линейной замены [4, 7, 8] может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma y + \overline{X}(x, y, u_1, \ldots, u_l, z_1, \ldots, z_p) \\[2ex] \frac{dy}{dt} = \overline{Y}(x, y, u_1, \ldots, u_l, z_1, \ldots, z_p) \\[2ex] \frac{du_i}{dt} = p_{i1}x + p_{i2}y + \sum\limits_{\nu=1}^{l} s_{i\nu}u_\nu + \overline{U_i}(x, y, u_1, \ldots, u_l, z_1, \ldots, z_p),\ i = \overline{1, l} \\[2ex] \frac{dz_j}{dt} = b_{j1}^*x + b_{j2}^*y + \sum\limits_{\nu=1}^{l} b_{j\nu}u_\nu + \sum\limits_{\mu=1}^{p} c_{j\mu}z_\mu + \overline{Z_j}(x, y, u_1, \ldots, u_l, z_1, \ldots, z_p),\ j = \overline{1, p},\ l + p = n \end{cases} \tag{4}$$

где γ – постоянная, при этом $\gamma = 1$, если нулевому корню соответствует одна группа решений, и $\gamma = 0$, если нулевому корню соответствует две группы решений. Все собственные числа матрицы $(s_{i\nu})_{i,\nu=\overline{1,l}}$ имеют отрицательные действительные части, функции $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{U_i}, \overline{Z_j}$ разлагаются в ряды по степеням переменных $x, y, u_1, \dots, u_l, z_1, \dots, z_p$, и разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Итак, пусть дана система вида (4), относительно функций $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{U_i}, \overline{Z_j}$ предполагаем, что они разлагаются в ряды по степеням переменных $x, y, u_1, \dots, u_l, z_1, \dots, z_p$, причём разложения начинаются членами не ниже второго порядка и сходятся в области:

$$|x| \le h,\ |y| \le h,\ |u_i| \le h\ (i = \overline{1,l}),\ |z_j| \le H < \infty\ (j = \overline{1,p}), \tag{5}$$

также будем предполагать, что

$$\overline{X}(0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0,\ \overline{Y}(0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0,\ \overline{U_i}(0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0\ (i = \overline{1,l}).$$

Ставим задачу исследовать нулевое решение системы (4) на устойчивость относительно переменных x, y, u_i $(i = \overline{1,l})$.

Для дальнейшего исследования нам потребуется привести систему (4) к специальному виду. Рассмотрим систему уравнений

$$f_i(x,y,u_1,u_2,\dots,u_l,z_1,\dots,z_p) = p_{i1}x + p_{i2}y + \sum_{\nu=1}^{l} s_{i\nu}u_\nu + \overline{U_i}(x,y,u_1,u_2,\dots,u_l,z_1,\dots,z_p) = 0,\ i = \overline{1,l},$$

определяющую, переменные u_i, как функции переменных $x, y, z_1, \dots, z_p$, согласно [7]

$$\left|\frac{\partial(f_1,\dots,f_l)}{\partial(u_1,\dots,u_l)}\right|_{x=y=z_\mu=u_\nu=0} = |s_{ij}|_{i,j=\overline{1,l}} \ne 0,$$

а значит эта система имеет единственное решение

$$u_i = w_i(x,y,z_1,\dots,z_p),\ i = \overline{1,l},$$

которое удовлетворяет условию

$$w_i(0,0,\dots,0) = 0,\ i = \overline{1,l},$$

т.к. $f_i(0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0$, то $w_i(0,0,z_1,\dots,z_p) = 0$. Сделав в системе (4) преобразование переменных $u_i = \xi_i + w_i$ $(i = \overline{1,l})$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma y + X(x,y,\xi_1,\dots,\xi_l,z_1,\dots,z_p) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x,y,\xi_1,\dots,\xi_l,z_1,\dots,z_p) \\ \frac{d\xi_i}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{l} s_{i\nu}\xi_\nu + U_i(x,y,\xi_1,\dots,\xi_l,z_1,\dots,z_p),\ i = \overline{1,l} \\ \frac{dz_j}{dt} = b_{j1}^*x + b_{j2}^*y + \sum\limits_{\nu=1}^{l} b_{j\nu}(\xi_\nu + w_\nu) + \sum\limits_{\mu=1}^{p} c_{j\mu}z_\mu + \overline{Z_j}(x,y,\xi_1+w_1,\dots,\xi_l+w_l,z_1,\dots,z_p),\ j = \overline{1,p} \end{cases} \tag{6}$$

Функции X, Y, U_i - аналитические функции переменных x, y, ξ_i, z_j, раскладывающиеся в ряды в области (7), причем разложение начинается членами не ниже второго порядка

$$|x| \le h,\ |y| \le h,\ |\xi_i| \le h_1\ (i = \overline{1,l}),\ |z_j| \le H < \infty\ (j = \overline{1,p}), \tag{7}$$

здесь h_1 - новая постоянная, определяемая в зависимости от h. Кроме того эти функции удовлетворяют условиям

$$X(0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0, Y(0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0, U_i(0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0. \tag{8}$$

Т.к. новые переменные обращаются в нуль тогда и только тогда, когда обращаются в нуль старые переменные, то задача устойчивости по одним переменным эквивалентна задаче устойчивости по другим переменным. Поэтому для решения задачи будем рассматривать систему (6).

Далее для исследования устойчивости будем рассматривать систему, полученную усечением системы (6):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma y + X(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_l, z_1, \ldots, z_p) \\ \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_l, z_1, \ldots, z_p) \\ \\ \frac{d\xi_i}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{l} s_{i\nu}\xi_\nu + U_i(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_l, z_1, \ldots, z_p), \ i = \overline{1, l} \end{cases} \tag{9}$$

3 Критический случай двух нулевых корней с двумя группами решений

В этом случае $\gamma = 0$, для простоты также предположим, что в системе (9) отсутствует третья группа уравнений, и исследуем устойчивость невозмущенного движения $x = y = z_j = 0$ $(j = \overline{1, p})$ относительно переменных x, y. Перепишем систему (9) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X^{(m)}(x, y, z_1, \ldots, z_p) + \cdots + X^{(N)}(x, y, z_1, \ldots, z_p) + \tilde{X}(x, y, z_1, \ldots, z_p) \\ \\ \frac{dy}{dt} = Y^{(m)}(x, y, z_1, \ldots, z_p) + \cdots + Y^{(N)}(x, y, z_1, \ldots, z_p) + \tilde{Y}(x, y, z_1, \ldots, z_p) \end{cases} \tag{10}$$

$X^{(k)}(x, y, z_1, \ldots, z_p)$ и $Y^{(k)}(x, y, z_1, \ldots, z_p)$ представляют собой формы k-го порядка по степеням x и y с коэффициентами, непрерывно зависящими от $z_1, \ldots, z_p$.

$$X^{(k)}(x, y, z_1, \ldots, z_p) = \sum_{i+j=k} A_i^j(z_1, \ldots, z_p) x^i y^j,$$

$$Y^{(k)}(x, y, z_1, \ldots, z_p) = \sum_{i+j=k} B_i^j(z_1, \ldots, z_p) x^i y^j.$$

Формы $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ первые ненулевые формы, $m \geq 2$. Предположим, что $X^{(m)}(x, y, z_1, \ldots, z_p)$ и $Y^{(m)}(x, y, z_1, \ldots, z_p)$ одновременно не обращаются в ноль при любом наборе $z_1, \ldots, z_p$.

$\tilde{X}(x, y, z_1, \ldots, z_p)$ и $\tilde{Y}(x, y, z_1, \ldots, z_p)$, представляют собой непрерывные функции и имеют порядок выше N по x и y, определенны в области $|x| \leq h, \ |y| \leq h, \ |z_j| \leq H < \infty$ $(j = \overline{1, p})$. При этом:

$$|\tilde{X}(x, y, z_1, \ldots, z_p)| \leq \bar{A}(|x| + |y|)^{N+1},$$

$$|\tilde{Y}(x, y, z_1, \ldots, z_p)| \leq \bar{A}(|x| + |y|)^{N+1}.$$

Для начала пусть $p = 1$, в этом случае система (10) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X^{(m)}(x, y, z) + \cdots + X^{(N)}(x, y, z) + \tilde{X}(x, y, z) \\ \\ \frac{dy}{dt} = Y^{(m)}(x, y, z) + \cdots + Y^{(N)}(x, y, z) + \tilde{Y}(x, y, z) \end{cases} \tag{11}$$

Обобщим метод изложенный Малкиным И. Г. в [6] и [7]. Для выведения условия устойчивости относительно x и y рассмотрим две формы:

$$\begin{cases} G(x, y, z) = xY^{(m)}(x, y, z) - yX^{(m)}(x, y, z) \\ \\ P(x, y, z) = xX^{(m)}(x, y, z) + yY^{(m)}(x, y, z) \end{cases} \tag{12}$$

Будем рассматривать случай, когда G может обращаться в ноль при $x \neq 0, \ y \neq 0$, т.е. G не знакоопределенная форма по *x,y*. Тогда уравнение

$$G = 0, \tag{13}$$

будет определять в пространстве семейство пересекающихся поверхностей. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X^{(m)}(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} = Y^{(m)}(x,y,z) \end{cases} \tag{14}$$

Все поверхности определяемые уравнением $G = 0$, содержат интегральные кривые (14). Всякая интегральная кривая уравнений (11) необходимо будет касаться интегральных кривых (14) и движение по ним будет направленно в ту же сторону. Значит, все интегральные кривые (11), будут касаться поверхностей $G = 0$.

Запишем уравнение (13), подставив в него (14), получаем тождество:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Получим семейство кривых $y = c(z)x$, пересекающихся в точке $(0,0,z)$, где z рассматривается как параметр. Если, обе правые части не обращаются одновременно в ноль ни при каком z, то в фазовом пространстве переменных x,y,z уравнение (13) будет образовывать семейство пересекающихся по прямой $x = 0,\ y = 0$ поверхностей, таких, что если провести через них сечение $z = const$, мы получим прямые пересекающиеся в центре $(0,0,const)$. На рисунке (рис. 1) показано как выглядят поверхности, определяемые уравнением

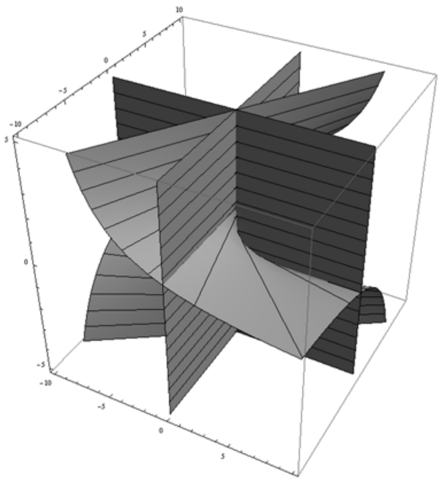

Рис. 1: Семейство поверхностей $G = 0$

$G = 0$ в пространстве.

Форма P в силу (14) имеет вид:

$$P = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2),$$

и, очевидно является производной положительной знакоопределенной по x,y формы $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, допускающей бесконечно малый высший предел по x,y. Если $P < 0$ на поверхностях, задаваемых уравнением $G = 0$, то $\frac{dV}{dt} < 0$ везде в области, кроме начала координат, где она обращается в ноль. Значит, $\frac{dV}{dt}$ является знакоопределенной отрицательной по переменным x,y. На основании теоремы [9, п.6.2] невозмущенное движение системы (14) асимптотически устойчиво. Тогда невозмущенное движение системы (11) в малой окрестности $x = 0,\ y = 0$ будет также устойчиво асимптотически.

Теперь вернемся к системе (10) и заметим, что если увеличить число переменных z, ничего в рассуждениях не поменяется. Тогда:

$$\begin{cases} G(x,y,z_1,\ldots,z_p) = xY^{(m)}(x,y,z_1,\ldots,z_p) - yX^{(m)}(x,y,z_1,\ldots,z_p) \\ P(x,y,z_1,\ldots,z_p) = xX^{(m)}(x,y,z_1,\ldots,z_p) + yY^{(m)}(x,y,z_1,\ldots,z_p) \end{cases} \tag{15}$$

и если $P<0$, на поверхностях $G=0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво относительно x,y.

Пусть теперь форма P может принимать положительные значения. Без ограничения общности будем полагать, что она принимает положительные значения при некотором наборе $z_1,\dots,z_p$ на оси x. К этому можно перейти, при фиксированных $z_1,\dots,z_p$, соответствующим поворотом осей. Но если уравнение (13) имеет решение $y=0$, то $Y^{(m)}$ при $y=0$ должна обращаться в ноль на плоскости. Тогда на плоскости при фиксированном наборе $z_1,\dots,z_p$:

$$\begin{cases} X^{(m)} = Ax^m + A_1yx^{m-1} + \dots + A_{m-1}y^{m-1}x + A_my^m \\ Y^{(m)} = Byx^{m-1} + B_2y^2x^{m-2} + \dots + B_{m-1}y^{m-1}x + B_my^m \end{cases} \tag{16}$$

Здесь A,B,A_i,B_i зависят от выбора плоскости и, следовательно, от набора $z_1,\dots,z_p$, однако на плоскости они являются константами. Так как форма P имеет вид (12) то:

$$P|_{y=0} = A(z_1,\dots,z_p)x^{m+1},$$

где $z_1,\dots,z_p$ - фиксированный набор. При m нечетном, A должна быть положительной, а при m четном, A может быть как положительной, так и отрицательной. Но в последнем случае замены x на $-x$ меняет знак A. Поэтому будем ее предполагать положительной.

Для доказательства неустойчивости будем использовать теорему Четаева [7]. А для этого рассмотрим функцию:

$$2V = \alpha^2x^2 - y^2, \tag{17}$$

где α^2 некоторая положительная постоянная. Производная этой функции, в силу уравнений (10) будет:

$$\frac{dV}{dt} = \alpha^2xX^{(m)} - yY^{(m)} + \cdots,$$

опущенные члены имеют порядок, не меньший $m+2$.

Функция V принимает положительные значения при $y=0$. То же самое имеет место по отношению к ее производной

$$V|_{y=0} = \frac{\alpha^2x^2}{2} > 0,\ \left.\frac{dV}{dt}\right|_{y=0} = \alpha^2Ax^{m+2} + \dots > 0,$$

если x достаточно мало и, в случае четного m, $x>0$. Это следует из вида $X^{(m)}$ и того, что коэффициент $A>0$, следовательно, вблизи начала координат существует область $V>0$, $\frac{dV}{dt}>0$.

1) Допустим теперь, что A>B. Покажем, что α можно выбрать такой малой, чтобы область $V>0$ была полностью заключена внутри области $\frac{dV}{dt}>0$.

$V>0$ когда $y^2=\alpha^2x^2$ (в силу (17)). Тогда V принимает положительные значения только при $-\alpha x < y < \alpha x$. Можно заменить это неравенство, взяв $y=\alpha\beta x$ где $\beta\in(-1;1)$.

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{y=\alpha\beta x} = \alpha^2x(Ax^m + A_1\alpha\beta x^m + \dots + A_{m-1}\alpha^{m-1}\beta^{m-1}x^m + A_m\alpha^m\beta^mx^m) -$$

$$-\alpha\beta x(B\alpha\beta x^m + B_2\alpha^2\beta^2x^m + \dots + B_{m-1}\alpha^{m-1}\beta(m-1)x^m + B_m\alpha^m\beta^mx^m) + \varphi x^m =$$
$$= [(A\alpha^2 + A_1\alpha^3\beta + \dots + A_{m-1}\alpha^{m+1}\beta^{m-1} + A_m\alpha^{m+2}\beta^m) -$$
$$-(B\alpha^2\beta^2 + B_2\alpha^3\beta^3 + \dots + B_{m-1}\alpha^m\beta^m + B_m\alpha^{m+1}\beta^{m+1}) + \varphi]x^{m+1},$$

где φ – некоторая аналитическая функция, обращающаяся в ноль при $x=0$.

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{y=\alpha\beta x} = (C+\varphi)x^{m+1},$$

значит, при достаточном малом x, знак этого выражения совпадает со знаком C (по крайне мере при $x>0$), где C – константа при фиксированном наборе $z_1,\dots,z_p$, и будет определяться следующим соотношением:

$$C = (A - B\beta^2)\alpha^2 + (A_1\beta - B_2\beta^3)\alpha^3 + \dots + (A_{m-1}\beta^{m-1} - B_m\beta^{m+1})\alpha^{m+1} + A_m\beta^m\alpha^{m+2}.$$

Выберем α столь малым, что знак будет совпадать со знаком $A - B\beta^2$, и так как $A > B$, то $A - B\beta^2 > 0$ при $\beta \in (-1; 1)$. Таким образом, в достаточно малой окрестности координат существует область $V > 0$, заключенная внутри области $\frac{dV}{dt} > 0$, а значит, движение будет неустойчиво по теореме Четаева [7].

2) Теперь допустим $A < B$. При таких значениях, $A - B\beta^2$ будет положительно лишь при некоторых $\beta^2 < 1$, значит, теперь, область $\frac{dV}{dt} > 0$ заключена внутри области $V > 0$, и условия теоремы Четаева не выполняются. Однако, покажем, что будет также неустойчивость.

Пусть $\overline{\beta}$ есть такая положительная величина, что при $|\beta| \leq \overline{\beta}$ величина $\frac{dV}{dt}$ положительна. Составим функцию:

$$2V_1 = \overline{\beta}^2 \alpha^2 x^2 - y^2.$$

Область $V_1 > 0$ целиком заключена внутри $\frac{dV}{dt} > 0$. Однако же, $\frac{dV_1}{dt}$ не всюду положительна в области $V_1 > 0$ и на границе $\frac{dV_1}{dt} < 0$, так как она обладает теми же свойствами что и V.

Пусть AOB есть границы области $V > 0$, а A_1OB_1 границы области $V_1 > 0$. Также эти области ограничены $0 \leq x \leq h$. Рассмотрим область $MNPQ$ (рис. 2), ограниченную отрезком MQ гиперболы $V = c$ и

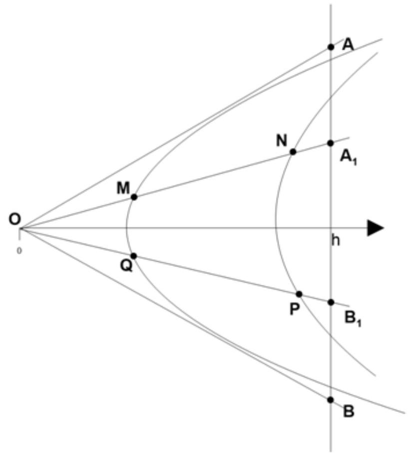

Рис. 2: Область $V > 0$

отрезком NP гиперболы $V = C$. При этом C фиксированное число, а c сколь угодно мало. Так что MQ расположено сколь угодно близко к точке O. Внутри $MNPQ$ $\frac{dV}{dt} > 0$ и для нее существует положительный нижний предел. Пусть $\frac{dV}{dt} > l > 0$ и $T = \frac{C}{l}$, рассмотрим кривую, выходящую в момент $t = T$ из точки F дуги NP. Уравнение этой интегральной кривой:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Будем двигаться вдоль этой дуги в сторону уменьшения t до момента $t = 0$. При этом интегральная кривая будет приближаться к началу координат, по крайней мере, пока не покинет области $A_1OB_1A_1$, так как в ней $\frac{dV}{dt} > 0$. Но если бы кривая в какой-то момент $0 \leq \tau < T$ покинула бы область $A_1OB_1A_1$, что она может сделать только через границы ON и OP, то должны выполняться условия $V_1 = 0$ и $\frac{dV_1}{dt} > 0$. Что, однако, невозможно, так как на границах OA_1 и OB_1 производная $\frac{dV_1}{dt} < 0$, как указывалось ранее.

Тогда при $t \in [0; T]$ интегральная кривая будет оставаться внутри области $NOPN$. Допустим она при $t = 0$ будет проходить через точку E и докажем, что точка тогда будет лежать внутри области $OMQO$. Для этого нужно показать, что интегральная кривая при убывании t от T до *0* проходит через MQ. Если же от противного предположить, что все время $0 \leq t \leq T$ интегральная кривая находится внутри $MNPQ$, тогда будем иметь:

$$V[x(0), y(0)] = V[x(T), y(T)] - \int\limits_0^T \frac{dV}{dt}\, dt < V[x(T), y(T)] - lT = C - C = 0,$$

поскольку $\frac{dV}{dt} < T$,где $T = \frac{C}{l}$, а $V[x(T), y(T)] = C$ (так как точка расположена на соответствующей гиперболе). Отсюда: $V[x(0), y(0)] < 0$, что невозможно, так как в области $MNPQ$ (где по предположению располагается точка E) $V > 0$.

Таким образом, точка E располагается в области $OMQO$. Рассмотрим теперь кривую, выходящую из точки E в момент времени $t = 0$. Очевидно, что это будет та же самая кривая, она придет в точку F при $t = T$. Значит, движение в момент времени $t = 0$ располагается сколь угодно близко к началу координат (так как c сколь угодно мало), а в момент времени $t = T$ на некотором расстоянии от него. Это означает, что невозмущенное движение будет неустойчиво.

3) Рассмотрим последний случай A=B, возьмём функцию:

$$2V = x^4 - y^2,$$

и область:

$$0 < x \le h, \ V > 0, \tag{18}$$

отсюда

$$x^4 - y^2 > 0,$$

значит

$$-x^2 < y < x^2,$$

следовательно, можно принять $y = \beta x^2$, где $\beta \in (-1; 1)$, очевидно, что при таком соотношении $V > 0$.

Составим производную от V, в силу уравнений (10)

$$\frac{dV}{dt} = 2x^3 X^{(m)} - yY^{(m)} + \cdots,$$

запишем ее в соответствии с (16), заменяя при этом y на βx^2

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{y=\beta x^2} = 2(Ax^{m+3} + A_1\beta x^{m+4} + \cdots + A_{m-1}\beta^{m-1}x^{2m+2} + A_m\beta^m x^{2m+3}) -$$

$$-(B\beta^2 x^{m+3} + B_2\beta^3 x^{m+4} + \cdots + B_{m-1}\beta^m x^{2m+1} + B_m\beta^{m+1}x^{2m+2}) + \varphi x^{m+3} + \rho\beta x^{m+3}\ldots,$$

где φ - аналитическая функция, обращающаяся в ноль при $x = 0$, а ρ - коэффициент перед x^{m+1} в $Y^{(m+1)}$, его можно предполагать сколь угодно малым, поскольку, если в системе (10) сделать замену $\eta = \sigma y$, где σ- постоянная, то A не изменится, а в форме $Y^{(m+1)}$ коэффициент перед x^{m+1} умножится на σ, которое мы можем положить малым.

Так как $B = A > 0$ и ρ численно мало, то вблизи начала координат $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{y=\beta x^2}$ будет принимать положительные значения (при $x > 0$, если m - четное) при всех $\beta \in (-1; 1)$. Следовательно, при h, достаточно малом, во всей области (18) $\frac{dV}{dt}$ принимает положительные значения, что удовлетворяет условиям теоремы Четаева. Таким образом, движение неустойчиво при каком-то фиксированном наборе $z_1, \ldots, z_p$, следовательно, оно будет неустойчиво относительно x,y.

Обобщим вышесказанное.

Утверждение: *Пусть предложена система уравнений возмущенного движения (10) при соответствующих наложенных на правые части ограничениях. Составим формы (15) и при этом форма G будет не знакоопределенная. Тогда возможны следующие случаи:*

1) Если на поверхностях, определяемых уравнением $G = 0$, форма P принимает лишь отрицательные значения, то невозмущенное движение $x = y = z_1 = \cdots = z_p = 0$ асимптотически устойчиво относительно x,y.

2) Если на поверхностях, определяемых уравнением $G = 0$, форма P может принимать положительные значения, то невозмущенное движение $x = y = z_1 = \cdots = z_p = 0$ неустойчиво относительно x,y.

Отметим, что предполагалось, чтобы $X^{(m)}(x, y, z_1, \ldots, z_p)$ и $Y^{(m)}(x, y, z_1, \ldots, z_p)$ не обращались в ноль одновременно, ни при каком наборе переменных $z_1, \ldots, z_p$. Предположим теперь, что существует какой-то набор $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}$ такой, что: $X^{(m)}(x, y, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}) = Y^{(m)}(x, y, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}) = 0$, соответственно, $G(x, y, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}) \equiv 0$. Тогда предлагается заменять в таком случае $G(x, y, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p})$ формой G^i:

$$G^i(x, y, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}) = xY^{(m+i)}(x, y, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}) - yX^{(m+i)}(x, y, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}),$$

$$P^i(x,y,\overline{z_1},\dots,\overline{z_p}) = xX^{(m+i)}(x,y,\overline{z_1},\dots,\overline{z_p}) + yY^{(m+i)}(x,y,\overline{z_1},\dots,\overline{z_p}),$$

где i это такой наименьший номер, что формы $X^{(m+i)}(x,y,\overline{z_1},\dots,\overline{z_p})$ и $Y^{(m+i)}(x,y,\overline{z_1},\dots,\overline{z_p})$ не обращаются в ноль одновременно.

Исследуя отдельно знак P на прямых (если $\overline{z_1},\dots,\overline{z_p}$ – изолированная точка) или поверхностях (если точка $\overline{z_1},\dots,\overline{z_p}$ не изолированная) $G^i = 0$ в особенностях $z_i = \overline{z_i}$, можно разрешить задачу и в более широком случае.

При $l > 0$ исследование устойчивости накладывает существенные ограничения на функции U_i, что будет показана на примере исследования устойчивости двух нулевых корней с одной группой решений следующем пункте.

4 Исследование устойчивости в случае двух нулевых корней с одной группой решений

Запишем систему (9) для этого случая:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + X(x,y,\xi_1,\dots,\xi_l,z_1,\dots,z_p) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x,y,\xi_1,\dots,\xi_l,z_1,\dots,z_p) \\ \frac{d\xi_i}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{l} s_{i\nu}\xi_\nu + U_i(x,y,\xi_1,\dots,\xi_l,z_1,\dots,z_p),\ i=\overline{1,l} \end{cases} \tag{19}$$

притом считаем выполненными условия (8) и с помощью преобразований, аналогичных тем, которые провел в своей работе А.М. Ляпунов [4], можно добиться того чтобы

$$Y(x,0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0,\ U_i(x,0,0,\dots,0,z_1,\dots,z_p) = 0\ (i=\overline{1,l}).$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде:

$$V = -V_2 + xy,$$

где V_2 – определенно положительная форма переменных $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_l$, такая, что

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_i}(\sum_{j=1}^{l}s_{ij}\xi_j) = -\sum_{i=1}^{l}\xi_i^2,$$

это возможно в силу [7]. Вычислим производную от функции V в силу уравнений (19)

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_i}(\sum_{j=1}^{l}s_{ij}\xi_j + U_i) + xY + y^2 + yX = \sum_{i=1}^{l}\xi_i^2 + y^2 - \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_i}U_i + xY + yX.$$

Если предположить, что функции U_i $(i=\overline{1,l})$ и X зависят от членов не ниже второго порядка по совокупности переменных y,ξ_i $(i=\overline{1,l})$, а функция Y от членов не ниже третьего порядка по совокупности переменных y,ξ_i $(i=\overline{1,l})$, то производная $\frac{dV}{dt}$ будет знакоопределенная положительная относительно переменных y,ξ_i $(i=\overline{1,l})$. При этом в области (7) существует область в которой функция $V > 0$. Поэтому при таких предположениях невозмущенное движение будет неустойчиво относительно переменных y,ξ_i $(i=\overline{1,l})$ [9], а значит, оно будет неустойчиво и относительно переменных x,y,ξ_i $(i=\overline{1,l})$.

5 Результаты

Для случая нулевого корня с двумя группами решения, в частном случае $l = 0$ получены условия асимптотической устойчивости и неустойчивости возмущенного движения системы (10) относительно части переменных (см. п.3), для случая нулевого корня с одной группой решений получено условие неустойчивости относительно части переменных при $l > 0$, при наложении существенных ограничений на функции X, Y, U_i (см. п.4).

Полученные результаты являются весьма частными в силу сложности рассматриваемого вопроса, их следует рассматривать не как всеобъемлющее исследование проблемы, а как предлагаемый путь её решения.

Список литературы

[1] V. I. Vorotnikov, V. V. Rumyantsev. *Ustojchivost' i upravlenie po chasti koordinat fazovogo vektora dinamicheskih sistem: teorija, metody i prilozhenija* [Stability and control with respect to a part of the phase coordinates of dynamic systems: theory, methods and applications]. Moscow, Nauchnyj Mir, 2001. (in Russian) = В. И. Воротников, В. В. Румянцев. *Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения.* Москва, Научный мир, 2001.

[2] G. V. Kamenkov. *Izbrannye trudy – Tom II / Ustojchivost' i kolebanija nelinejnyh sistem* [Selected works – Vol.II / Stability and oscillations of nonlinear systems]. Moscow, Nauka, 1972. (in Russian) = Г. В. Каменков. *Избранные труды – Том II / Устойчивость и колебания нелинейных систем.* Москва, Наука, 1972.

[3] M. G. Lizunova. On the stability of a part of variables in the critical case of a pair of pure imaginary roots. *Ustojchivost' i nelinejnye kolebanija*, 59–65, 1991. (in Russian) = М. Г. Лизунова. Об устойчивости части переменных в критическом случае пары чисто мнимых корней. *Устойчивость и нелинейные колебания*, 59–65, 1991.

[4] A. M. Lyapunov. *Issledovanie odnogo iz osobennyh sluchaev ustojchivosti* [The study of one of the special cases of stability]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1963. (in Russian) = А. М. Ляпунов. *Исследование одного из особенных случаев устойчивости.* Ленинград, Изд-во ЛУ, 1963.

[5] A. M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion.* London - Washington DC, Tailor & Francis, 1992. = А. М. Ляпунов. *Общая задача об устойчивости движения.* Москва - Ленинград, Гостехиздат, 1950.

[6] I. G. Malkin. On the stability of motion in the sense of Lyapunov. *Matematicheskij sbornik*, 3(45):47–101, 1938. (in Russian) = И. Г. Малкин. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. *Математический сборник*, 3(45):47–101, 1938.

[7] I. G. Malkin. *Theory of stability of motion.* United States Atomic Energy Commission, Office of Technical Information, 1958. = И. Г. Малкин. *Теория устойчивости движения.* Москва, Наука, 1966.

[8] V. P. Prokop'ev. On stability with respect to some of the variables in the critical case of a single zero root. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 39(3):422–426, 1975. (in Russian) = В. П. Прокопьев. Об устойчивости относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня. *ПММ*, 39(3):422–426, 1975.

[9] V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner. *Ustojchivost' i stabilizacija dvizhenija po otnosheniju k chasti peremennyh* [Stability and stabilization of motion with respect to a part of the variables]. Moscow, Nauka, 1987. (in Russian) = В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.* Москва, Наука. Гл. ред. Физ.-мат., 1987.

[10] V. N. Shchennikov. On partial stability in the critical case of *2k* pure imaginary roots. *Differencial'nye i integral'nye uravnenija: metody topologicheskoj dinamiki*, P. 46–50, 1985. (in Russian) = В. Н. Щенников. О частичной устойчивости в критическом случае *2k* чисто мнимых корней. *Дифференциальные и интегральные уравнения: методы топологической динамики*, С. 46–50, 1985.

[11] V. N. Shchennikov. Solution of the stability problem in the critical case. *Metody sravnenija i metody Ljapunova*, P. 8–17, 1990. (in Russian) = В. Н. Щенников. Решение задачи об устойчивости в критическом случае. *Методы сравнения и методы Ляпунова*, С. 8–17, 1990.

On the stability study with respect to the part of the variables in the critical case of two zero roots

Alexander A. Karasev
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Alexey E. Lamotkin
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. In this paper, we study stability with respect to part of variables in the case of two zero roots. Consideration is given to the the possibility of modifying the methods used in the stability theory, to the case of the partial stability. With the proposed approach particular conditions of stability and instability are received for the case of a double zero root with one or two groups of solutions.

Keywords: stability with respect to the part of variables, partial stability, critical case, Lyapunov function, direct Lyapunov method.