Построение обобщенных решений стохастической задачи Коши для квазилинейного уравнения в абстрактной алгебре Коломбо

В.А. Бовкун

123456m@inbox.ru

УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

Работа посвящена исследованию абстрактной стохастической задачи Коши для квазилинейного уравнения, с генератором R-полугруппы в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Случайные возмущения входят аддитивно в форме гауссового белого шума. На основе теории Коломбо умножения обобщенных функции и связи R-полугрупп с интегрированными полугруппами в работе построено приближённое решение в подходящей фактор-алгебре.

1 Введение

Исследование различных процессов окружающего мира при наличии неполной информации приводит, как правило, к математическим моделям в форме стохастических задач. Среди них важное место занимают модели в форме абстрактных стохастических задач Коши для уравнения первого порядка

$$X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), \qquad t \in [0;T], \quad X(0) = \zeta, \tag{1}$$

где оператор A является генератором некоторой полугруппы в гильбертовом пространстве H, слагаемое $\{\mathbb{W}(t),\ t \geqslant 0\}$ отражает наличие случайных возмущений и интерпретируется в рамках теории случайных процессов как гауссовый белый шум со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$ и начальное условие ζ — H-значная случайная величина.

Для решения задачи (1) на современном этапе исследований можно выделить три главных подхода. Первый основан на переходе от дифференциальной задачи (1) к интегральной с помощью конструкции интеграла Ито в бесконечномерном случае [1, 2, 3]. Другой подход основан на связи стохастических уравнений для процессов и детерминированных уравнений для вероятностных характеристик этих процессов [4, 5, 6]. Третий подход основан на теории абстрактных обобщенных функций. В рамках данной теории может быть строго определен процесс $\mathbb{W}(t),\ t \geqslant 0$ как обобщенная производная от винеровского процесса $W(t),\ t \geqslant 0$, со значениями в пространстве $\mathbb{H}$, где $W(t) = W(t,\omega),\ \omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P), \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geqslant 0$. В работах [6]–[9] для задачи (1) построено обобщенное решение в пространстве абстрактных распределений.

В общем случае, наличие нелинейных слагаемых и слагаемых, содержащих нерегулярные коэффициенты в стохастическом уравнении, приводит к проблеме умножения обобщенных функций. Один из методов

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

преодоления проблемы умножения обобщенных функций состоит в построении некоторой фактор-алгебры, являющейся расширением пространства распределений, где обобщенные функции представляются классами эквивалентности. Преимущество данного подхода состоит в том, что во введенной фактор-алгебре удается определить коммутативное и ассоциативное умножение элементов; более того, операция дифференцирования согласуется с операцией умножения элементов. Наиболее известным и иситорически первым расширением пространства обобщенных функций является фактор-алгебра Коломбо (см., напр., [10, 11]) .

В настоящей работе основным объектом является абстрактная стохастическая задача Коши для квазилинейного уравнения

$$X'(t) = AX(t) + F(X(t)) + B\mathbb{W}(t), \qquad t \in [0;T], \quad X(0) = \zeta, \tag{2}$$

где оператор A является генератором R-полугруппы $\{V(t), t \geqslant 0\}$ в пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$, F — нелинейное отображение в H. Данная работа является продолжением исследований [6, 12], посвященных решению задачи (2) с генератором полугруппы класса C_0: для построения решения задачи (2) с генератором R-полугруппы используется метод Коломбо погружения задачи в фактор-алгебру. На основе связи R-полугрупп (регуляризации по пространственной переменной) с интегрированными полугруппами (регуляризация по переменной t) удается определить структуру подходящей абстрактной фактор-алгебры $G^n(\Omega, H_a)$ [1], в которой методом сжимающих отображений построено приближенное решение задачи (2).

2 Определение абстрактной стохастической фактор-алгебры Коломбо

Учитывая приложения, в которых возникают модели в форме абстрактных стохастических задач, в качестве H будем рассматривать пространство $L^2(\mathbb{R})$. Алгебру H_a определим как совокупность всех m раз непрерывно дифференцируемых функций из $L^2(\mathbb{R})$, замкнутую по норме

$$\|y\|_{H_a} := \sum_{i=0}^{m} \|y^{(i)}(x)\|_{C(\mathbb{R})},$$

где параметр m определяется свойствами оператора A: $DomA^2 \subset H_a \subset DomA$.

Рассмотрим $\mathcal{A}_0$ — совокупность всех функций $\varphi \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$. Для любого $q \in \mathbb{N}$ определим множество $\mathcal{A}_q$ следующим образом

$$\mathcal{A}_q = \{\varphi \in \mathcal{A}_0 : \int_{\mathbb{R}} t^k \varphi(t)dt = 0, \quad k = 1, ..., q\}.$$

Кроме того, рассмотрим подмножество параметризованных функций из $\mathcal{A}_0$:

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varphi \in \mathcal{A}_0,$$

которые при $\varepsilon_n \to 0$ представляют собой δ-образные последовательности. Далее, как обобщение пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ [11], введем пространство $\mathcal{E}(H_a)$ — H_a-значных функций $u_\varphi(t) : \mathcal{A}_0 \times \mathbb{R} \to H_a$

$$\mathcal{E}(H_a) := \{u = u_\varphi(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}; H_a), \varphi \in \mathcal{A}_0\}.$$

Заметим, что при определении отображения φ играет роль параметра (а не основной функции, как в теории распределений).

В пространстве $\mathcal{E}(H_a)$ определены операции умножения элементов и дифференцирования следующим образом:

$$uv := u_\varphi v_\varphi, \qquad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(u_\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{A}_0, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

При этом, введенная операция дифференцирования по переменной t согласуется с операцией умножения и отображение $\mathbf{i}$

$$\mathbf{i} : \ \mathcal{D}'(H_a) \to \mathcal{E}(H_a), \quad (\mathbf{i}w)_\varphi := w * \varphi, \qquad w \in \mathcal{D}'(H_a), \quad \varphi \in \mathcal{A}_0.$$

осуществляет вложение распределений $\mathcal{D}'(H_a)$ в пространство $\mathcal{E}(H_a)$.

[1] Параметр n определяется свойствами R-полугруппы; H_a — некоторая алгебра в H

Однако, несмотря на факт возможности вложения $\mathcal{D}'(H_a)$ в $\mathcal{E}(H_a)$, существует проблема, которая не позволяет взять пространство $\mathcal{E}(H_a)$ в качестве абстрактной алгебры Коломбо. А именно, даже для двух бесконечно дифференцируемых отображений $w_1, w_2 \in \mathcal{D}'(H_a)$ произведение, определяемое равенством (3), в общем случае, не согласуется с обычным произведением

$$(\mathbf{i}w_1)_\varphi \cdot (\mathbf{i}w_2)_\varphi = (w_1 * \varphi) \cdot (w_2 * \varphi) \neq (w_1 \cdot w_2) * \varphi = \mathbf{i}(w_1 \cdot w_2)_\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{A}_0.$$

Чтобы преодолеть это препятствие, следуя [12], введем нуль-пространство $\mathcal{N}(H_a)$ H_a-значных функций.

Определение 1. Множество $\mathcal{N}(H_a)$ состоит из всех элементов $u \in \mathcal{E}(H_a)$, удовлетворяющих условию: для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0$ и компакта $K \subset \mathbb{R}$ существуют $C > 0$, $p \in \mathbb{N}$, такие что

$$\sup_{t \in K} \left\| \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u_{\varphi_\varepsilon}(t) \right\| \leqslant C\varepsilon^{q-p}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}_q, \quad q \geqslant p. \tag{4}$$

Однако, множество $\mathcal{N}(H_a)$ не является идеалом во всем пространстве $\mathcal{E}(H_a)$. Поэтому введем множество отображений $\mathcal{E}_M^n(H_a)$.

Определение 2. Множество $\mathcal{E}_M^n(H_a)$ состоит из всех элементов $u \in \mathcal{E}(H_a)$, удовлетворяющих условию: для любых компакта $K \subset \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0$ найдутся $C > 0$ и $p \in \mathbb{N}$, такие что

$$\sup_{t \in K} \left\| \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u_{\varphi_\varepsilon}(t) \right\| \leqslant C\varepsilon^{-(p+n)}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}_p. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что для пространства $\mathcal{E}_M^n(H_a)$ введенное нуль-пространство является идеалом. Заметим, что необходимость введения множества $\mathcal{E}_M^n(H_a)$, а не множества отображений умеренного роста $\mathcal{E}_M(H_a)$ [12], объясняется тем, что оператор A является генератором R-полугруппы.

Таким образом, получаем абстрактную фактор-алгебру Коломбо H_a-значных распределений

$$G^n(H_a) := \mathcal{E}_M^n(H_a)/\mathcal{N}(H_a).$$

Более того, используя структурную теорему в пространстве $\mathcal{D}'(H_a)$, можно показать, что отображение $\mathbf{i}$ переводит совокупность H_a-значных распределений $\mathcal{D}'(H_a)$ в фактор-алгебру $G^n(H_a)$.

Элементами фактор-алгебры $G^n(H_a)$ являются классы отображений, которые мы будем обозначать заглавными буквами $Y, Z, ...$, а представителей этих классов соответствующими строчными буквами $y, z, ...$; также, если известен представитель y класса Y, то для этого класса будем использовать обозначение $\{y\}$.

Далее, определим абстрактную стохастическую фактор-алгебру $G^n(\Omega, H_a)$, обобщающую абстрактную алгебру Коломбо $G^n(H_a)$, как совокупность измеримых отображений $\{Z = Z(\omega), \omega \in \Omega\}$, определённых на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих значение в алгебре $G^n(H_a)$. Измеримость отображения Z понимается в следующем смысле: для любого представителя $z \in Z$ и произвольной функции $\varphi \in \mathcal{A}_0$ прообразом множества из борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(C^\infty(\mathbb{R}; H_a))$ при отображении z_φ является элемент σ-алгебры $\mathcal{F}$.

Носителем элемента Y фактор-алгебры $G^n(\Omega, H_a)$ назовем дополнение до наибольшего открытого множества, на котором любой представитель класса Y равен нулю. При таком определении носителя класс $\{\mathbf{i}w\}$, соответствующий вложению распределения $w \in \mathcal{D}'(H_a)$, имеет носитель, в точности совпадающий с носителем распределения w.

3 Постановка задачи в абстрактной стохастической фактор-алгебре

Для того чтобы сформулировать постановку задачи (2) в фактор-алгебре $G^n(\Omega, H_a)$, определим процесс Q-белого шума $\{\mathbb{W}(t) = \mathbb{W}(t, x, \omega),\ t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}\}$ при почти всех $\omega \in \Omega$ как элемент пространства $\mathcal{D}_0'(\mathbb{H})$ абстрактных $\mathbb{H}$-значных распределений с носителем на множестве $[0; \infty)$. Пусть $\{W_Q(t),\ t \geqslant 0\}$ — $\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс, определяемый сходящимся рядом

$$W_Q(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \beta_i(t) e_i, \qquad t \geqslant 0, \quad P_{a.s.},$$

где $\beta_i(t)$ — независимые броуновские движения и e_i — ортонормированный базис в $\mathbb{H}$, состоящий из собственных векторов оператора следа $Q : Qe_i = \mu_i^2 e_i$, $\sum \mu_i^2 < \infty$. Положим $W_Q(t)$ равным нулю на промежутке $(-\infty; 0)$ и будем рассматривать его как регулярный элемент пространства $\mathcal{D}_0'(\mathbb{H})$. Пусть оператор

$B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H_a)$, тогда в силу определения обобщенной производной в пространстве $\mathcal{D}'_0(H_a)$

$$\langle \varphi, B\mathbb{W}(\cdot, x, \omega)\rangle := \langle \varphi, BW'_Q(\cdot, x, \omega)\rangle = -\langle \varphi', BW_Q(\cdot, x, \omega)\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad P_{a.s.},$$

получим $B\mathbb{W}$ — обобщенный H_a-значный процесс со свойствами Q-белого шума, $supp\, B\mathbb{W} = [0; \infty)$.

С помощью отображения $\mathbf{i}$ преобразуем процесс $B\mathbb{W} \in \mathcal{D}'_0(H_a)$ в элемент $\{\mathbf{i}B\mathbb{W}\}$ фактор-алгебры $G^n(\Omega, H_a)$, представитель которого определяется следующим образом:

$$(\mathbf{i}B\mathbb{W})_\varphi(t, x, \omega) := (B\mathbb{W} * \varphi)(t, x, \omega) = \langle \varphi(t - \cdot), B\mathbb{W}(\cdot, x, \omega)\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{A}_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad P_{a.s.}.$$

Далее в работе будем использовать обозначение $Bw_\varphi(\cdot) := (\mathbf{i}B\mathbb{W})_\varphi(\cdot, x, \omega), x \in \mathbb{R}, P_{a.s.}$. Тогда в силу свойств Q-винеровского процесса, оператора B и отображения $\mathbf{i}$, при фиксированном $\varphi \in \mathcal{A}_0$ имеем

$$Bw_\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; H_a),\ P_{a.s.}, \qquad \text{более того,} \qquad Bw_\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega; H_a)),$$

и, следовательно, Bw является представителем класса $\{\mathbf{i}B\mathbb{W}\} \in G^n(\Omega, H_a)$.

Поскольку носителем $\mathbb{W} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{H})$ является множество $[0; \infty)$, то носителем Bw также является множество $[0; \infty)$, то есть $supp\, \{\mathbf{i}B\mathbb{W}\} = [0; \infty)$.

Теперь перейдем к постановке задачи в фактор-алгебре $G^n(\Omega, H_a)$. Пусть в задаче (2) оператор A является генератором R-полугруппы $\{V(t), t \geqslant 0\}$ в пространстве H, где R — линейный ограниченный оператор в H, с плотной областью значений и $\rho(A) \neq \varnothing$. Поскольку множество регулярных точек не пусто, возьмем $\lambda_0 \in \rho(A)$ и рассмотрим резольвенту $\mathcal{R}(\lambda_0)$. Тогда по теореме о связи R-полугрупп и интегрированных (см., напр., [13]) найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что оператор A является и генератором n-раз интегрированной полугруппы $\{S_n(t), t \geqslant 0\}$, определяемой через R-полугруппу следующим образом:

$$S_n(t)f = (\lambda_0 I - A)^n \int_0^t \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_{n-1}} V(t_n) f dt_n ... dt_2 dt_1, \qquad f \in H. \tag{6}$$

Таким образом, в дальнейшем будем использовать тот факт, что по известной R-полугруппе операторов $\{V(t), t \geqslant 0\}$ построена n-раз интегрированная полугруппа $\{S_n(t), t \geqslant 0\}$ с тем же генератором — оператором A.

Следуя постановке абстрактной задачи Коши в обобщенном смысле [14] и постановке стохастической задачи в пространстве $\mathcal{D}'_0(H)$ [3, 6], задача (2) при $F \equiv 0$ формулируется следующим образом:

$$\langle \psi, X'(t)\rangle = \langle \psi, \delta\rangle\zeta + \langle \psi, AX(t)\rangle + \langle \psi, B\mathbb{W}(t)\rangle, \qquad \psi \in \mathcal{D}. \tag{7}$$

Далее, применяя отображение $\mathbf{i}$ к распределениям δ и $B\mathbb{W}$ и принимая во внимание присутствие нелинейного отображения F в задаче (2), получим задачу для класса $Y \in G^n(\Omega, H_a)$:

$$Y'(t) = \{\zeta\mathbf{i}\delta\}(t) + AY(t) + F(Y(t)) + \{\mathbf{i}B\mathbb{W}\}(t), \qquad supp\, Y \subseteq [0; \infty). \tag{8}$$

Решение задачи (8) сведем к решению задачи для представителя. Пусть $Bw = Bw_\varphi(t)$, $\varphi \in \mathcal{A}_0$, является представителем класса $\{\mathbf{i}B\mathbb{W}\} \in G^n(\Omega, H_a)$ с носителем $[0; \infty)$. Возьмем представителя класса $\{\mathbf{i}\delta\}$, соответствующего вложению δ-функции в фактор-алгебру: $\mathbf{i}\delta = \delta * \varphi = \varphi$. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_0$, $supp\, \varphi \subset [-\tau; \infty)$. Будем рассматривать задачу для $y(t) = y_\varphi(t)$ с выбранным φ:

$$y'(t) = \zeta\varphi(t) + Ay(t) + F(y(t)) + Bw(t), \qquad t \geqslant -\tau, \tag{9}$$

$$y(t) = 0, \qquad t < -\tau. \tag{10}$$

Следуя работе [12], для задачи (9)–(10) рассмотрим мягкое решение, которое, в силу связи (6) R-полугруппы с интегрированной полугруппой $\{S_n(t), t \geqslant 0\}$ и свойств интегрированной полугруппы, может быть записано следующим образом:

$$y(t) = \int_{-\tau}^t S_n(t-s)\zeta\varphi^{(n)}(s) ds + \int_{-\tau}^t S_n(t-s)\frac{d^n}{ds^n} F(y(s)) ds + \int_{-\tau}^t S_n(t-s)(Bw)^{(n)}(s) ds =: \mathcal{V}y(t), \tag{11}$$

где $y(t) = y_\varphi(t)$, $supp\, \varphi \subset [-\tau; \infty)$. Положим значения операторов $S_n(t)$ равными нулю при $t < 0$. Поскольку $\mathbf{i}\delta_\varphi(t) = \varphi(t)$ и $Bw_\varphi(t)$ имеют носители во множестве $[-\tau; \infty)$, то в силу свойств свертки, первое и третье слагаемые в правой части равенства (11) тоже имеют носители в $[-\tau;\infty)$. Второе слагаемое, в силу равенства $F(0)=0$ и бесконечной дифференцируемости F, имеет носитель, совпадающий с носителем y. Следовательно, правая часть (11) имеет носитель, совпадающий с носителем y.

По свойствам n-раз интегрированной полугруппы справедливы соотношения [6]:

$$\int_{-\tau}^{t} S_n(t-s)\frac{d^n}{ds^n}F(y(s))ds \in DomA,$$

$$A\int_{-\tau}^{t} S_n(t-s)\frac{d^n}{ds^n}F(y(s))ds = S_n(t)\frac{d^n}{dt^n}F(y(t)) - \frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}F(y(t)), \qquad t \geqslant -\tau.$$

Поскольку для любого $y(t)\in H_a$ справедливо вложение $\frac{d^n}{dt^n}F(y(t))\in H_a\subset DomA$, правая часть последнего равенства при каждом $t\geqslant-\tau$ принадлежит $DomA$. Следовательно, интеграл в левой части принадлежит $DomA^2$:

$$\int_{-\tau}^{t} S_n(t-s)\frac{d^n}{ds^n}F(y(s))ds \in DomA^2 \subset H_a, \qquad t\geqslant -\tau. \tag{12}$$

Таким образом, решение $y(t)=y_\varphi(t,x,\omega),\ \varphi\in\mathcal{A}_0,\ t\geqslant-\tau,\ x\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega$, задачи (9)–(10) будем искать в пространстве $C^\infty([-\tau;\infty);H_a),\ P_{a.s.}$.

Оператор $\mathcal{V}$ является интегральным оператором типа Вольтерра, однако, ни он, ни любая его степень не являются сжимающими операторами в пространстве H. Чтобы преодолеть это препятствие, рассмотрим семейство $\{S_n(t), t\geqslant 0\}$ как регулярный элемент пространства операторнозначных распределений $\mathcal{D}'(\mathcal{L}(H))$ (см., напр., [13]) и определим в этом пространстве как обобщенную производную порядка n от $S_n(t)$ распределение U:

$$\langle\varphi,U\rangle := \langle\varphi, S_n^{(n)}(\cdot)\rangle = (-1)^n\langle\varphi^{(n)},S_n(\cdot)\rangle, \qquad \varphi\in\mathcal{D}, \quad supp\,U=[0;\infty), \tag{13}$$

которое является разрешающим оператором для задачи (8) при $\mathbb{W}=F\equiv 0$ в пространстве $\mathcal{D}'(H)$. Далее, определим свертку

$$\langle\varphi(t-\cdot),U(\cdot)\rangle = (-1)^n\int_{-\tau}^{t}\varphi^{(n)}(s)S_n(t-s)ds, \qquad \varphi\in\mathcal{A}_0, \quad t\geqslant-\tau. \tag{14}$$

Имея в виду экспоненциальную ограниченность S_n: $\|S_n(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\leqslant Ce^{at},\ t\in[0;\infty)$, получим оценку

$$\|(U*\varphi)(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = \left\|(-1)^n\int_{-\tau}^{t}\varphi^{(n)}(s)S_n(t-s)ds\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant C(\varphi)e^{at}, \qquad t\geqslant-\tau, \tag{15}$$

в частности

$$\|(U*\varphi_\varepsilon)(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant C\varepsilon^{-n-1}e^{at}, \qquad t\geqslant-\tau. \tag{16}$$

Учитывая равенство (14), определяющее вложение производной n-го порядка полугруппы $\{S_n(t), t\geqslant 0\}$ в пространство распределений $\mathcal{D}'(\mathcal{L}(H))$, введем оператор

$$\mathbf{V}y(t) = \int_{-\tau}^{t}(U*\varphi)(t-s)\zeta\varphi(s)ds + \int_{-\tau}^{t}(U*\varphi)(t-s)F(y(s))ds + \int_{-\tau}^{t}(U*\varphi)(t-s)Bw(s)ds, \tag{17}$$

который, как и $\mathcal{V}$, является интегральным оператором типа Вольтерра. В силу определения оператора U равенством (13) через производную от операторов интегрированной полугруппы и включения (12) получаем, что каждое слагаемое правой части (17) при каждом $t\geqslant-\tau$ является элементом H_a. Таким образом, оператор $\mathbf{V}$ действует из H_a в H_a при каждом $t\geqslant-\tau$.

Далее построим решение уравнения

$$y(t)=\mathbf{V}y(t), \qquad t\in[0;T], \tag{18}$$

доказав для этого, что оператор $\mathbf{V}^k$ является сжимающим в пространстве H для некоторого $k=k(T)$.

4 Основной результат

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

- *оператор A является генератором R-полугруппы $\{V(t), t \geqslant 0\}$ в H и $DomA^2 \subset H_a \subset DomA$;*
- *отображение F является бесконечно дифференцируемым, удовлетворяет условию Липшица и $F(0) = 0$;*
- *$B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H_a)$;*
- *$\{\mathbb{W}(t),\ t \geqslant 0\}$ — процесс Q-белого шума;*
- *ζ — H_a-значная $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина.*

Тогда для любого $t \in [0; T]$ и почти всех $\omega \in \Omega$ существует фундаментальная в H последовательность y_j приближенных решений задачи (9)–(10). Данная последовательность принадлежит классу $Y \in G^n(\Omega, H_a)$, который является решением задачи (8).

Доказательство. Пусть y, z — произвольные представители некоторых классов фактор-алгебры $G^n(\Omega, H_a)$. Тогда, в силу липшицевости отображения F, в алгебре H_a имеет место оценка

$$\|F(y(s)) - F(z(s))\| \leqslant L\|y(s) - z(s)\|, \qquad s \in [-\tau; T].$$

Рассмотрим разность

$$\mathbf{V}y(t) - \mathbf{V}z(t) = \int_{-\tau}^{t} (U * \varphi)(t-s)[F(y(s)) - F(z(s))]ds, \qquad t \in [-\tau; T].$$

Из предыдущего неравенства и экспоненциальной оценки (15) получаем

$$\|\mathbf{V}y(t) - \mathbf{V}z(t)\| \leqslant C_\varphi L e^{a(t+\tau)}(t+\tau) \max_{s\in[-\tau;T]} \|y(s) - z(s)\|, \qquad P_{a.s.}.$$

Аналогично, для разности квадратов оператора $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V}^2 y(t) - \mathbf{V}^2 z(t) = \int_{-\tau}^{t} (U * \varphi)(t-s)F(\mathbf{V}y(s))ds - \int_{-\tau}^{t} (U * \varphi)(t-s)F(\mathbf{V}z(s))ds =$$

$$= \int_{-\tau}^{t} (U * \varphi)(t-s)\left(F(\mathbf{V}y(s)) - F(\mathbf{V}z(s))\right) ds,$$

получаем оценку

$$\|\mathbf{V}^2 y(t) - \mathbf{V}^2 z(t)\| \leqslant C_\varphi^2 L^2 e^{a(t+\tau)} \frac{(t+\tau)^2}{2} \max_{s\in[-\tau;T]} \|y(s) - z(s)\|.$$

Несложно убедиться, что в общем случае

$$\|\mathbf{V}^k y(t) - \mathbf{V}^k z(t)\| \leqslant C_\varphi^k L^k e^{a(t+\tau)} \frac{(t+\tau)^k}{k!} \max_{s\in[-\tau;T]} \|y(s) - z(s)\|, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$\max_{t\in[-\tau;T]} \|\mathbf{V}^k y(t) - \mathbf{V}^k z(t)\| \leqslant C_\varphi^k L^k e^{a(T+\tau)} \frac{(T+\tau)^k}{k!} \max_{t\in[-\tau;T]} \|y(t) - z(t)\|.$$

Выберем константу $k = k(T)$, при которой оператор $\mathbf{V}^k$ является сжимающим. Тогда для любого начального приближения $y_{\varphi,0}(t) \in H_a$ итерационная последовательность $y_{\varphi,j}(t) = \mathbf{V}^{jk} y_{\varphi,0}(t)$ имеет предел в пространстве H:

$$y_\varphi(t) = \lim_{j\to\infty} \mathbf{V}^{jk} y_{\varphi,j}(t), \qquad t \in [-\tau; T].$$

Здесь возможны два случая. В первом из них предельный элемент $y_\varphi(t) \in H_a$, во втором — $y_\varphi(t) \notin H_a$.

Сначала рассмотрим случай $y_\varphi(t) \in H_a$. Покажем, что $y_\varphi(t)$ является представителем некоторого класса $Y \in G^n(\Omega, H_a)$. Из уравнения (18) с оператором (17) следует оценка

$$\max_{t\in[-\tau;T]} \|y_{\varphi_\varepsilon}(t)\| \leqslant C(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} e^{a(t+\tau)} \|\zeta\varphi_\varepsilon(t)\| + C(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} e^{a(t+\tau)} \|(Bw)_{\varphi_\varepsilon}(t)\| +$$

$$+C(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} e^{a(t+\tau)} \|F(y_{\varphi_\varepsilon}(t))\| \leqslant C_1(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} (\|\zeta\varphi_\varepsilon(t)\| + \|(Bw)_{\varphi_\varepsilon}(t)\|) +$$

$$+C_2(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} \|F(y_{\varphi_\varepsilon}(t))\| \int_{-\tau}^{t} \|y_{\varphi_\varepsilon}(s)\| ds, \qquad P_{a.s.}.$$

Силу липшицевости и условия $F(0) = 0$, отображение F является ограниченным, следовательно

$$\max_{t\in[-\tau;T]} \|y_{\varphi_\varepsilon}(t)\| \leqslant C_1(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} (\|\zeta\varphi_\varepsilon(t)\| + \|(Bw)_{\varphi_\varepsilon}(t)\|) + C_3(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} \int_{-\tau}^{t} \|y_{\varphi_\varepsilon}(s)\| ds. \tag{19}$$

Поскольку $\zeta\mathbf{i}\delta$ и Bw можно рассматривать в качестве представителей соответствующих классов из $G^n(\Omega, H_a)$, то по определению (5) пространства $\mathcal{E}^n_M(H_a)$, найдется $p \in \mathbb{N}$ такое, что нормы $\|\zeta\varphi_\varepsilon(\cdot)\|, \|(Bw)_{\varphi_\varepsilon}(\cdot)\|$ растут не быстрее, чем $\varepsilon^{-(p+n)}$ при $\varphi \in \mathcal{A}_p$. Отсюда первое слагаемое в правой части неравенства (19) при $\varepsilon \to 0$ растет не быстрее, чем $\varepsilon^{-(p+2n+1)}$ на $\varphi \in \mathcal{A}_p$. Тогда, согласно (16) и лемме Гронуолла–Беллмана, справедлива оценка

$$\max_{t\in[-\tau;T]} \|y_{\varphi_\varepsilon}(t)\| \leqslant C\varepsilon^{-(p+2n+1)}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}_p\,,$$

и, следовательно, $y_\varphi(t)$ является представителем некоторого класса $Y \in G^n(\Omega, H_a)$. Более того, его сужение на фактор-алгебру $G^n_{(-\infty;-\tau)}(\Omega, H_a)$ равно нулю. Напомним, что функция φ в постановке задачи (9)–(10) была выбрана произвольной с носителем во множестве $[-\tau;\infty)$. Теперь выбирая $|\tau|$ сколь угодно малым, заключаем, что носитель $y_\varphi(t)$ принадлежит множеству $[0;\infty)$. Итак, мы получили приближенное решение задачи (8) в стохастической фактор-алгебре $G^n(\Omega, H_a)$ с носителем $[0;\infty)$.

Теперь обсудим вопрос единственности полученного решения. Пусть $Y, Z \in G^n(\Omega, H_a)$ — два решения задачи (8) с носителями на множестве $[0;\infty)$. Возьмем $\varphi \in \mathcal{A}_0$, $supp\,\varphi \subset [-\tau;\infty)$ и рассмотрим представителей $y_\varphi \in Y$, $z_\varphi \in Z$, которые являются соответствующими решениями задачи (9)–(10) с различными представителями классов $\{\zeta\mathbf{i}\delta\}$ и $\{\mathbf{i}B\mathbb{W}\}$. Покажем, что $y_\varphi - z_\varphi \in \mathcal{N}(H_a)$. В силу уравнения (9) для y_φ и z_φ, имеем

$$y'_\varphi(t) - z'_\varphi(t) = h(t) + A(y_\varphi(t) - z_\varphi(t)) + F(y_\varphi(t)) - F(z_\varphi(t)) + g(t), \qquad t \in [-\tau;T],$$

где $h \in \mathcal{N}(H_a)$ и $g \in \mathcal{N}(H_a)$ — разности двух представителей классов $\{\zeta\mathbf{i}\delta\}$ и $\{\mathbf{i}B\mathbb{W}\}$, соответственно. Тогда, аналогично выводу оценки (19), получаем

$$\max_{t\in[-\tau;T]} \|y_{\varphi_\varepsilon}(t) - z_{\varphi_\varepsilon}(t)\| \leqslant C_1(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} \|h_{\varphi_\varepsilon}(t)\| + C_1(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} \|g_{\varphi_\varepsilon}(t)\|$$

$$+C_3(\varphi_\varepsilon) \max_{t\in[-\tau;T]} \int_{-\tau}^{t} \|y_{\varphi_\varepsilon}(s) - z_{\varphi_\varepsilon}(s)\| ds.$$

Поскольку первые два слагаемые правой части данного неравенства удовлетворяют условию (4), то в силу леммы Гронуолла–Беллмана заключаем, что разность $y_\varphi - z_\varphi$ также принадлежит $\mathcal{N}(H_a)$. Следовательно, y_φ и z_φ принадлежат одному классу Y фактор-алгебры $G^n(\Omega, H_a)$, носитель которого, как было показано выше, принадлежит $[0;\infty)$. Таким образом, решение задачи (8) единственно.

Теперь вернемся ко второму случаю, когда предельный элемент $y_\varphi(t)$ не входит в алгебру H_a. Здесь мы имеем лишь приближенное, в соответствии с требуемым уровнем погрешности, решение задачи (9)–(10) для представителя. Это решение определяется элементами итерационной фундаментальной последовательности $y_j(t) = \mathbf{V}^{jk} y_0(t)$ и параметром ε. $\square$

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Список литературы

[1] G. Da Prato, J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge University Press, 2014.

[2] L. Gawarecki, V. Mandrekar. *Stochastic differential equations in infinite dimensions.* Springer, Berlin, 2011.

[3] I. V. Melnikova, A. I. Filinkov and U. A. Anufrieva. Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions *Journal of Mathematical Sciences*, 111(2):3430–3475, 2002.

[4] G. Da Prato. *Kolmogorov equations for stochastic PDEs.* Birkhauser Verlag AG, 2004.

[5] I. V. Melnikova, V. S. Parfenenkova. Feynman-Kac theorem in Hilbrt spaces. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014(208):1–10, 2014.

[6] I. V. Melnikova. *Stochastic Cauchy Problems in Infinite Dimensions. Regularized and Generalized Solutions.* CRC Press, Taylor & Francis Group: Boca Raton and London, 2016.

[7] M. A. Alshanskiy, I. V. Melnikova. Regularized and generalized solutions of infinite-dimensional stochastic problems. *Sbornik Mathematics*, 202(11):1565–1592, 2011 (in Russian). = М. А. Альшанский, И. В. Мельникова. Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач. *Математический сборник*, 202(11):3–30, 2011.

[8] I. V. Melnikova, A. I. Filinkov. Weak and generalized solutions of abstract stochastic equations. *Doklady Mathematics*, 62(3):373–377, 2000 (in Russian). = И. В. Мельникова, А. И. Филинков. Слабые и обобщенные решения абстрактных стохастических уравнений. *Доклады академии наук*, 375(4):443–447, 2000.

[9] I. V. Melnikova, U. A. Alekseeva. Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems. *Chaotic modeling and simulations*, 2014(1):49–56, 2014.

[10] J. F. Colombeau. *Elementary Introduction to New Generalized Functions.* North Holland, Amsterdam, 1985.

[11] M. Oberguggenberger. *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations.* Pitman Research Notes Math. 259, Longman Scientific & Technical, Essex, Harlow, 1992.

[12] I. V. Melnikova, U. A. Alekseeva. Quasilinear stochastic Cauchy problems in spaces of distributions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2012:1–11, 2012.

[13] I. V. Melnikova, U. A. Anufrieva. Peculiarities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 148(4):481–632, 2008.

[14] H. O. Fattorini. *The Cauchy Problem.* Cambridge Academ, 2009.

Construction of generalized solutions for quasi-linear stochastic Cauchy problem in abstract Colombo algebra

Vadim A. Bovkun
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: Cauchy problem, Wiener process, white noise, R-semi-group of operators, generalized function, Colombeau algebra.

The paper is devoted to investigation of the stochastic Cauchy problem for a quasi-linear equation with an operator generating an R-semi-group in $L^2(\mathbb{R})$. Random perturbations are included additively in the form of Gaussian white noise. An approximate solution is constructed in an appropriate factor-algebra based on the Colombo theory of multiplication for generalized functions and the connection between R-semi-groups of operator with integrated semi-groups.