Design and Stability Analysis of Nondeterministic Multidimensional Populations Dynamics Models

Anastasiya V. Demidova[¶], **Olga V. Druzhinina**[‖**], **Olga N. Masina**[††]

[¶] *Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)*
[‖] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS*
[**] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS*
[††] *Bunin Yelets State University*

Email: demidova_av@rudn.university, ovdruzh@mail.ru, olga121@inbox.ru

The multidimensional model of the population dynamics is considered in the paper. This model is the generalization of the Lotka–Volterra model in case of interaction of the ultimate number of populations. The deterministic description of the model is given by the system of the ordinary nonlinear differential equations presented in the paper in the form of the multidimensional vector differential equation. The qualitative properties of the specified model are sufficiently well studied by means of Lyapunov methods. However, the probabilistic factors influencing on the behavior of model are not taken into account at the deterministic description of model. The new approaches to the modeling and stability analysis are of theoretical and applied interest in the nondeterministic case. In this paper, the methods for design of multidimensional nondeterministic models of interaction of populations are considered. The first method is connected with the transition from the vector nonlinear ordinary differential equation to the corresponding vector differential inclusions, fuzzy and stochastic differential equations. Using the principle of reduction, which allows us to study the stability problem of solving the differential inclusion to the stability problem of solving other types of equations, as a basis, the conditions of stability are obtained for the designed models. The second method is connected with the technique of design of the self-consistent stochastic models. The scheme of interaction is received on the basis of this technique. This scheme includes a symbolical record of possible interactions between the system elements. The structure of the multidimensional stochastic model is described, and the transition to the corresponding Fokker–Planck vector equation is carried out by means of the system state operators and the system state change operator. The rules for the transition to the multidimensional stochastic differential equation in the Langevin form are formulated. The execution of the numerical experiment with the application of the developed program complex for the solving the systems of the stochastic differential equations is possible for the models which are the concretization of the studied general model. The described approach to the modeling of the stochastic systems can find the application in the problems of comparing of the qualitative properties of the models in deterministic and stochastic cases. The obtained results are aimed at the developing methods for the analysis of nondeterministic nonlinear models.

The work is partially supported by RFBR grant No 15-07-08795 and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.A03.21.0008).

Key words and phrases: model of population dynamics, stability, differential inclusions, stochastic model, principle of the reduction.

In: K. E. Samouilov, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov (eds.): Selected Papers of the VII Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems", Moscow, Russia, 24-Apr-2017, published at http://ceur-ws.org

Построение и анализ устойчивости недетерминированных многомерных моделей динамики популяций

А. В. Демидова[¶], **О. В. Дружинина**[‖**], **О. Н. Масина**[††]

[¶] *Российский университет дружбы народов*
[‖] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН*
[**] *ИПУ РАН*
[††] *Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

Email: demidova_av@rudn.university, ovdruzh@mail.ru, olga121@inbox.ru

Рассмотрена многомерная модель популяционной динамики, являющаяся обобщением модели Лотки–Вольтерра на случай взаимодействия конечного числа популяций. Детерминистическое описание модели дается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, представленной в работе в виде многомерного векторного дифференциального уравнения. Качественные свойства указанной модели достаточно хорошо изучены с помощью методов Ляпунова. Однако при детерминистическом описании модели не учитываются вероятностные факторы, влияющие на поведение модели. В недетерминистическом случае новые подходы к моделированию и анализу устойчивости представляют теоретический и прикладной интерес. В настоящей работе рассмотрены способы построения многомерных недетерминированных моделей взаимодействия популяций. Первый способ связан с переходом от векторного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения к соответствующим векторным дифференциальным включениям, нечетким и стохастическим дифференциальным уравнениям. На основе принципа редукции, позволяющего свести задачу об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости решений других типов уравнений, получены условия устойчивости для построенных моделей. Второй способ связан с методикой построения самосогласованных стохастических моделей. На основе этой методики получена схема взаимодействия, которая включает в себя символическую запись возможных взаимодействий между элементами системы.С помощью операторов состояния системы и оператора изменения состояния системы описана структура многомерной стохастической модели, и осуществлен переход к соответствующему векторному уравнению Фоккера–Планка. Сформулированы правила перехода к многомерному стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ланжевена. Для моделей, являющихся конкретизацией изучаемой общей модели, возможно проведение численного эксперимента с применением разработанного программного комплекса для решения систем стохастических дифференциальных уравнений. Описанный подход к моделированию стохастических систем может найти применение в задачах сравнения качественных свойств моделей в детерминированном и стохастическом случаях. Полученные результаты направлены на развитие методов анализа недетерминированных нелинейных моделей.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 15-07-08795, а также Минобрнауки России (соглашение № 02.A03.21.0008).

Ключевые слова: модель популяционной динамики, устойчивость, дифференциальные включения, стохастическая модель, принцип редукции.

1. Введение

Исследование устойчивости моделей популяционной динамики является важной проблемой, некоторые направления решения которой представлены в работах [1–7]. Вопросы существования и устойчивости решений моделей, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов, рассматривались в [8–12] и в других работах.

Одним из широко используемых методов исследования устойчивости является метод функций Ляпунова [10, 11]. Устойчивость решений классических и обобщенных моделей популяционной динамики методом функций Ляпунова рассматривалась в [1]. В [2, 6–9] описан системный подход, позволяющий с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости моделей, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов. Указанный подход базируется на переходе от детерминистического описания модели к стохастическому и на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости других типов уравнений. Подход позволяет с единой точки зрения изучать свойства устойчивости решений дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений.

В настоящей работе рассмотрена нелинейная многомерная модель динамики взаимодействия популяций. Детерминированное описание модели дается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Выполнен переход от указанной модели к соответствующим недетерминированным моделям, задаваемым с помощью конечномерных дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. В настоящей работе выполнен анализ устойчивости на основе принципа редукции.

Как известно, при детерминистическом описании модели не учитываются вероятностные факторы, влияющие на поведение модели [5, 13, 14]. В связи с этим важной задачей является построение и изучение адекватных стохастических моделей, а также сравнительный анализ свойств детерминированных и соответствующих стохастических моделей. На полученных в настоящей работе достаточных условиях устойчивости базируется сравнительный анализ качественных свойств для детерминистической и стохастической моделей.

2. Детерминированная модель

Рассматривается модель, описываемая системой дифференциальных уравнений вида [1, 3]:

$$\dot{x}_i = x_i \left(a_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где x_i — численность i-й популяции в момент t, $\dot{x}_i = dx_i/dt$, a_i и p_{ii} — коэффициенты роста i-й популяции в отсутствие других, постоянные p_{ij} при $i \neq j$ характеризуют влияние взаимодействия между популяциями на скорость роста, $P = (p_{ij})$, i, $j = 1, \dots, n$ — матрица взаимодействий.

Модель (1) представляет собой классическую модель Лотки–Вольтерра для n-мерного случая. Указанная модель описывает динамику биологического сообщества при следующих условиях:

1) относительная скорость роста каждой популяции не зависит от внутрипопуляционной структуры,
2) эта скорость линейно зависит от численностей популяций, входящих в сообщество.

Указанные условия, характерные для уравнения Лотки–Вольтерра, представляют собой упрощенную гипотезу о характере взаимодействий между популяциями в сообществе. Данная гипотеза, известная как принцип парных взаимодействий, предполагает аддитивность вклада каждой из популяций в относительную скорость роста, что достаточно хорошо обосновано биологически. Однако линейный характер этого вклада значительно хуже соответствует процессам, происходящим в биологических сообществах, и может быть учтен для приближения в некоторой окрестности положения равновесия [1]. В связи с этим изучение модели (1) можно рассматривать как важный этап, предшествующий изучению моделей, которые являются обобщениями модели (1).

Условия устойчивости решений модели (1) на основе метода функций Ляпунова получены в [1], а на основе дивергентного метода — в [3]. От детерминированной модели (1) возможен переход к различным типам соответствующих недерминированных моделей.

3. Построение недерминированных n-мерных моделей Лотки–Вольтерра и анализ устойчивости на основе принципа редукции

Модель (1) представима в виде векторного уравнения

$$dx/dt = f(x), \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(x) = (f_1, f_2, \ldots, f_n) = (x_1(a_1 - p_{11}x_1 - \ldots - p_{1n}x_n), \ldots, x_n(a_n - p_{n1}x_1 - \ldots - p_{nn}x_n))$, $x \in R^n_+$, R^n_+ — n-кратное декартово произведение множества R_+ на себя, $R_+ = [0, \infty)$, $f : R^n_+ \to R^n_+$.

Для модели (2) коэффициенты a_i и $p_{i\ j}$, i, $j = 1, \ldots, n$, могут с учетом экологического смысла принимать различные значения из соответствующих интервалов $[\alpha_{i_1},\ \alpha_{i_2}]$ и $[\gamma_{ij_1},\ \gamma_{ij_2}]$ соответственно. От модели (2) осуществлен переход к конечномерному дифференциальному включению вида

$$\dot{x}_1 \in x_1(a_1 - p_{11}x_1 - \ldots - p_{1n}x_n), ..., \dot{x}_n \in x_n(a_n - p_{n1}x_1 - \ldots - p_{nn}x_n). \tag{3}$$

В векторной форме модель (3) представлена следующим образом:

$$dx/dt \in F(x), \tag{4}$$

где $F(x) = \{f(x)|a_i \in A_i, p_{ij} \in {}_{ij}\}$, $A_i ::= [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}]$, ${}_{ij} ::= [\gamma_{ij_1}, \gamma_{ij_2}]$, $F : R^n_+ \to 2^{R^n_+}$. Введенные множества A_i и C_{ij} определяют множества значений соответствующих параметров a_i и $p_{i\ j}$. Подмножества $\{A_i\}_\alpha = \{a_i|\mu_{A_i}(a_i) \geqslant \alpha\}$ и $\{C_{ij}\_\alpha = \{p_{ij}|\mu_{C_{ij}}(p_{ij}) \geqslant \alpha\}$ представляют более узкие множества, которые получим при учете дополнительных условий $\alpha \in (0, l]$, влияющих на взаимодействие компонент, а следовательно, и на устойчивость модели (2). Тогда уравнение (2) можно заменить на нечеткое конечномерное дифференциальное уравнение

$$dX/dt = F(X), \tag{5}$$

где $F : Z^n_+ \to P(R^n_+)$, $P(R^n_+)$ — совокупность всех нечетких подмножеств из R^n_+.

Соответствующее уравнению (5) дифференциальное включение имеет вид $d\varphi/dt \in F_\alpha(\varphi)$, где $\alpha \in (0, 1]$, $F_\alpha(\varphi) = \{f(\varphi(t))|a_i \in \{A_i\}_\alpha,\ p_{ij} \in \{C_{ij}\}_\alpha\}$.

С помощью принципа сведения задачи об устойчивости дифференциального включения к задаче об устойчивости нечеткого дифференциального уравнения [7, 8] и с учетом (2)–(5) получены следующие условия устойчивости дифференциального включения (4) и нечеткого уравнения (5):

1) если для замкнутого множества $M \subset R^n_+$ существует функция Ляпунова V относительно включения (4), для которой верно неравенство $D_+V(x) \leqslant 0$ $\forall x \in B(M, r)$, где $D_+V(x) = \sup DV(x)$ — верхняя производная функции Ляпунова, множество (M, r) — r-окрестность множества M, то множество устойчиво относительно этого включения;

2) если верно неравенство $D_+V(x) \leqslant -w(e(x,M)) \quad \forall x \in B(M,r)$, где функция $w : B(M,r) \to R$ непрерывна и положительна вне , то множество асимптотически устойчиво относительно включения (4);
3) если для замкнутого нечеткого множества $M \subset (R^n_+)$, где $P(R^n_+)$ — совокупность всех нечетких подмножеств из R^n_+, существует функция Ляпунова V относительно уравнения (5), для которой при $\alpha \in (0,1]$ верно неравенство $D_+V_\alpha(x) \leqslant 0 \ \forall x \in B(M_\alpha, r)$, то множество $M\alpha$ устойчиво относительно этого уравнения;
4) если выполняется условие $D_+V_\alpha(x) \leqslant -w_\alpha(e(x,M_\alpha)) \ \forall x \in B(M_\alpha, r)$, где функция $w_\alpha : (0,r) \to R$ непрерывна и положительна, то множество α асимптотически устойчиво относительно уравнения (5).

В настоящей работе рассмотрено обобщение модели (2) на стохастический случай, а именно, от уравнения (2) осуществлен переход к соответствующему стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx/dt = S(x), \tag{6}$$

где $S(x)$ — случайная функция. С помощью принципа редукции задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости других типов уравнений получены условия устойчивости нечеткого дифференциального уравнения (5) и стохастического уравнения (6).

Установлено, что если нулевое решение нечеткого уравнения (5) α-устойчиво по Ляпунову при каждом $\alpha \in (0,1]$ (равномерно по α), то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения (6) устойчиво по вероятности (соответственно устойчиво почти наверное). Кроме того, показано, что если нулевое решение нечеткого уравнения (5) асимптотически α-устойчиво при любом $\alpha \in (0,1]$ (равномерно по α), то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения (6) асимптотически устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво почти наверное). На основе полученных достаточных условий устойчивости дан сравнительный анализ качественных свойств детерминистической и стохастической моделей.

4. Построение самосогласованной стохастической модели для n-мерной модели Лотки–Вольтерра

Синтез некоторых моделей популяционной динамики на основе применения метода построения стохастических самосогласованных моделей [14] осуществлен в [5, 6]. Согласно основной идее метода, для исследуемой системы можно описать схему взаимодействий в виде символического представления всех возможных взаимодействий между элементами системы. Для получения схемы взаимодействия используются операторы состояния системы и оператор изменения состояния системы. Далее предлагается записать интенсивности переходов и основное кинетическое уравнение, для которого можно с помощью формального разложения в ряд получить приближенное уравнение Фоккера–Планка. От уравнения Фоккера–Планка нетрудно перейти к эквивалентному стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ланжевена вида:

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dW,$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояния системы, $f(t, x(t))$ — вектор сноса, $g(t, x(t))$ — матрица диффузии, $W \in R^n$ — стандартный n-мерный винеровский процесс.

При практическом применении метода стохастическое дифференциальное уравнение можно записать сразу после записи схемы взаимодействия. Это связано с тем, что для записи коэффициентов уравнения Фоккера–Планка необходимо знать только интенсивности переходов и операторы изменения состояний.

Схема взаимодействия элементов системы (1) представляется в виде:

$$X_i \xrightarrow{p_{i0}} 2X_i,$$

$$X_i + X_j \xrightarrow{p_{ij}} X_j,$$

где $i, j = 1, \dots, n$. Таким образом, данная схема описывает систему из n видов, в которой особи могут взаимодействовать $n(n+1)$ различными способами.

Первая строка схемы описывает свободное размножение популяции i-го вида в отсутствии других факторов. Вторая строка при $i = j$ описывает внутривидовую конкуренцию, а при $i \neq j$ — межвидовую конкуренцию.

Оператор изменения состояния системы имеет вид: $R = \{R_{lk},\, l = 1, ..., n, k = 0, ..., n\}$, где

$$R_{lk} = \begin{cases} (0, \; ... \; \overbrace{, 1,}^{l- \text{ место}} \; ..., \; 0), & l = 1, \; ..., \; n, \quad k = 0, \\ (0, \; ... \; \underbrace{, -1,}_{l- \text{ место}} \; ..., 0), & l = 1, \; ..., \; n, \quad k = 1, \; ..., \; n. \end{cases}$$

Состояние системы можно описывать с помощью вектора состояния системы $x = (x_1, ..., x_n)$. Интенсивности переходов из состояния x в состояние $x + R$ в единицу времени определяются соотношениями:

$$s_{l,k}(x) = p_{lk} x_l x_k,$$

где $l = 1, ..., n$, $k = 0, ..., n$, и пусть $x_k = 1$, если $k = 0$.

Соответствующее модели уравнение Фоккера–Планка имеет вид:

$$\partial_t P(x,t) = -\sum_{i=1}^{n} [A_i(x) P(x,t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} \partial_{x_j} [B_{ij}(x) P(x,t)],$$

где

$$A_i(x) = \sum_{j=\overline{0,n}} R_{ij} \cdot s_{ij}(x) = p_{i0} x_i - \sum_{j=\overline{1,n}} p_{ij} x_i x_j,$$

$$B_{ii}(x) = \sum_{j=\overline{0,n}} R_{ij} \cdot (R_{ij})^T \cdot s_{ij}(x) = p_{i0} x_i + \sum_{j=\overline{1,n}} p_{ij} x_i x_j \quad \text{и} \quad B_{ij}(x) = 0, \;\; \text{при} \;\; i \neq j.$$

Взаимосвязь коэффициентов стохастического дифференциального уравнения (4) и коэффициентов уравнения Фоккера–Планка описывается соотношениями:

$$a(x) = A(x), \quad b(x) = B(x) B(x)^T.$$

Для построенной самосогласованной стохастической модели Лотки–Вольтерра получение аналитического решения затруднительно, однако для частных случаев общей n-мерной модели возможно проведение численного эксперимента с применением разработанного программного комплекса для решения систем стохастических дифференциальных уравнений [15, 16]. В дальнейшем планируется провести численный анализ с целью получения численных решений для полученных моделей, а также выявление влияния введения стохастики на поведение системы.

Исследование полученного стохастического дифференциального уравнения в форме Ланжевена позволяет изучить влияние введения стохастики на поведение изучаемой системы. Данный подход к построению и анализу нелинейных моделей может служить для решения задач, направленных на сравнительный анализ детерминистических и стохастических моделей.

5. Выводы

Принцип редукции позволил получить условия устойчивости многомерной модели популяционной динамики с переходом к дифференциальному включению, а также к нечеткому и стохастическому дифференциальному уравнениям. Указанный переход учитывает изменение параметров в исследуемой модели и позволяет на основе принципа редукции выполнить сравнительный анализ свойств моделей. Условия устойчивости могут быть использованы для изучения динамического поведения моделей популяционной динамики. Применение метода построения самосогласованных стохастических моделей для многомерных систем Лотки–Вольтерра позволяет оценить влияние введения стохастики на поведение этих систем. Полученные результаты направлены на дальнейшее развитие методов построения и анализа устойчивости стохастических моделей.

Литература

1. Ю. А. Пых, Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. Москва: Наука, 1983.
2. О. В. Дружинина, О. Н. Масина, Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. Москва: ВЦ РАН, 2009.
3. О. В. Дружинина, О. Н. Масина, Е. .В. Игонина, Исследование устойчивости состояний равновесия экологических уравнений индексно-дивергентным методом, Качественные свойства, асимптотика и стабилизация нелинейных динамических систем. Межвуз. сб. научн. трудов. Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 2010, С. 105–111.
4. О. В. Дружинина, О. Н. Масина, А. В. Щербаков, Структура и качественный анализ математических моделей динамики популяций при наличии мутуализма, Нелинейный мир (2016), Т. 14, no. 6, С. 32–42.
5. А. В. Демидова, О. В. Дружинина, О. Н. Масина, Исследование устойчивости модели популяционной динамики на основе построения стохастических самосогласованных моделей и принципа редукции, Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика (2015), no. 3, С. 18–29.
6. A. V. Demidova, O. V. Druzhinina, M. Jacimovic, O. N. Masina, Construction and Analysis of Nondeterministic Models of Population Dynamics. In: Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham, Vol. 678, 2016, pp. 498–510.
7. О. В. Дружинина, О. Н. Масина, Системный подход к исследованию устойчивости моделей, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов, Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения (2015), Т. 15, no. 3, С. 24–30.
8. И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, Об устойчивости систем со случайными параметрами, ПММ (1960), Т. 24, С. 809–823.

9. F. Kozin, Stability of the linear stochastic systems, Lecture notes in math., Vol. 294. New York: Springer Verlag, 1972, pp. 189–192.
10. А. А. Шестаков, Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. Москва: УРСС, 2007.
11. Ю. Н. Меренков, Устойчиво-подобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. Монография. Москва: Изд-во РУДН, 2000.
12. О. Н. Масина, О существовании решений дифференциальных включений, Дифференц. уравнения (2008), Т. 44, no. 6, С. 845–847.
13. И. П. Павлоцкий, В. М. Суслин, Стохастическая модель эволюции популяции в пространстве, Математическое моделирование (1994). Т. 6, no. 3. С. 9–24.
14. А. В. Демидова, М. Н. Геворкян, А. Д. Егоров, А. В. Королькова, Д. С. Кулябов, Л. А. Севастьянов, Влияние стохастизации на одношаговые модели, Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика (2014), no. 1, С. 71–85.
15. M. N. Gevorkyan, T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov, Stochastic Runge–Kutta software package for stochastic differential equations, Dependability Engineering and Complex Systems, Vol. 470. Springer International Publishing, 2016, pp. 169–179.
16. E. G. Eferina, A. V. Korolkova, M. N. Gevorkyan, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov, One-step stochastic processes simulation software package, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (2014), no. 3, pp. 46–59.