The Problem of Numerical Simulation of Propagation of Guided Waveguide Modes in a Regular Homogeneous Open Waveguide

Andrey S. Drevitskiy[‡], **Leonid A. Sevastianov**[‡§], **Dmitriy V. Divakov**[‡]

[‡] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation
[§] *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russian Federation

Email: adrevitskiy@gmail.com, sevastianov_la@rudn.university, divakov_dv@rudn.university

The work is dedicated to the problem of numerical simulation of the propagation of guided modes in a planar three-layer dielectric waveguide.

Maxwell's equations in a Gaussian system of units, material equations for linear isotropic dielectric media and boundary conditions corresponding to guided TE modes were chosen as a mathematical model of the waveguide propagation of polarized monochromatic electromagnetic radiation. Properties of this regular homogeneous open waveguide with three layers having different refractive indices were investigated.

The formulation of such waveguide task consists of the Helmholtz equation obtained by reducing the Maxwell equations, the boundary conditions for the TE modes and the asymptotic conditions for the guided modes for the Helmholtz equation. To solve such waveguide problem, we used the wave coupling method which consists of the following steps: the method of separation of variables is used to solve the Helmholtz equation, after that the solution represented as a product of two functions (each depends only on one variable) and then we substitute it into the boundary coupling conditions and form a system of linear algebraic equations for further solving and finding the coefficients of phase deceleration and amplitude coefficients. In addition to this method we used the method of separation of variables used to solve the Helmholtz equation, the Gauss method, adapted for solving homogeneous system of linear algebraic equations.

The work presents a scheme of a three-layer planar open waveguide, a graph of dispersion curves showing the dependence of the phase deceleration coefficients on the thickness of the waveguide and the graph of the transverse parts of the guided waveguide modes. All numerical calculations and the described algorithm of symbolic numerical simulation are presented in the computer algebra system called Maple.

The publication was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.A03.21.0008), RFBR according to the research projects No. 15-07-08795 and No. 16-07-00556.

Key words and phrases: mathematical modeling, numerical methods, symbolic-numerical simulation, Helmholtz equation, wave coupling method, numerical simulation of propagation of guided waveguide modes, open waveguide.

In: K. E. Samouilov, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov (eds.): Selected Papers of the VII Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems", Moscow, Russia, 24-Apr-2017, published at http://ceur-ws.org

Задача численного моделирования распространения направляемых волноводных мод в регулярном однородном открытом волноводе

А. С. Древицкий[‡], **Л. А. Севастьянов**[‡§], **Д. В. Диваков**[‡]

[‡] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

[§] *Лаборатория теоретической физики, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри, д. 6, г. Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Email: adrevitskiy@gmail.com, sevastianov_la@rudn.university, divakov_dv@rudn.university

В настоящей работе рассматривается задача численного моделирования распространения направляемых мод в плоском трехслойном диэлектрическом волноводе.

В качестве математической модели волноводного распространения поляризационного монохроматического электромагнитного излучения были выбраны уравнения Максвелла в гауссовой системе единиц, материальные уравнения для линейных изотропных диэлектрических сред и граничные условия, отвечающие направляемым TE–модам. Были изучены свойства данного регулярного однородного открытого волновода с тремя слоями, имеющими различные показатели преломления.

Постановка такой волноводной задачи состоит из уравнения Гельмгольца, полученного путем редуцирования уравнений Максвелла, граничных условий, выделяющих TE–моды, и асимптотических условий, выделяющих направляемые моды, для уравнения Гельмгольца. Для решения данной волноводной задачи использовался метод волнового сопряжения, состоящий в следующем: для решения уравнения Гельмгольца используется метод разделения переменных и далее решение, представленное в виде произведения двух функций (каждая зависит только от одной переменной), подставляем в граничные условия сопряжения и формируем систему линейных алгебраических уравнений для дальнейшего решения и нахождения коэффициентов фазового замедления и амплитудных коэффициентов. Помимо данного метода в работе использовались метод разделения переменных, примененный для решения уравнения Гельмгольца, метод Гаусса, адаптированный для решения однородных систем линейных алгебраических уравнений.

В работе представлены схема трехслойного планарного открытого волновода, график дисперсионных кривых, показывающий зависимость коэффициентов фазового замедления от толщины волновода, и график поперечных частей направляемых волноводных мод. Все численные расчеты и описанный алгоритм символьно численного моделирования представлены в системе компьютерной алгебры Maple.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 02.A03.21.0008) и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 15-07-08795 и № 16-07-00556.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, символьно численное моделирование, уравнение Гельмгольца, метод волнового сопряжения, численное моделирование направляемых волноводных мод, открытый волновод.

1. Введение

В ходе настоящего исследования рассмотрены уравнения Максвелла, материальные уравнения и граничные условия на бесконечности в рамках задачи моделирования распространения направляемых волноводных мод в диэлектрическом волноводе, предполагая гармоническую зависимость от времени и инвариантность компонент поля по y. В рамках данной задачи уравнения Максвелла редуцируются к уравнениям Гельмгольца. Также рассмотрены методы решения волноводной задачи.

Математической постановкой задачи для направляемых мод, описанной выше, является:

$$\begin{cases} \left(\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + k_0^2 \varepsilon(x)\mu\right) E_y = 0, \\ E_y^{(1)}\Big|_{x=h,0} = E_y^{(2)}\Big|_{x=h,0}, \\ \dfrac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x}\Bigg|_{x=h,0} = \dfrac{\partial E_y^{(2)}}{\partial x}\Bigg|_{x=h,0}, \\ E_y \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0, \end{cases}$$

где E_y — компонента вектора напряженности электрического поля, k_0 — волновое число в вакууме, $n(x)$ — показатель преломления.

В рамках настоящей работы исследованы свойства открытого волновода: поля и дисперсионного соотношения.

2. Основная часть

Будем рассматривать схему планарного трехслойного открытого волновода, структура которого представлена на рис. 1.

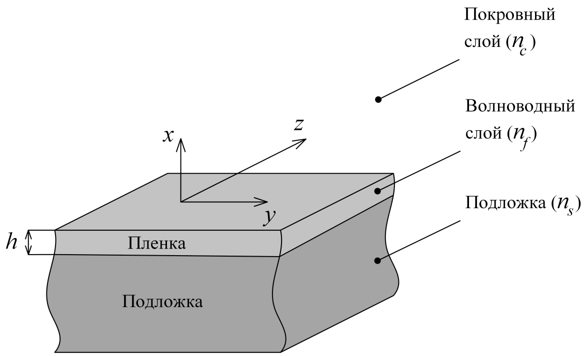

Рис. 1. Схема плоского трехслойного диэлектрического волновода

Преобразуя уравнения Максвелла с помощью материальных уравнений, получим систему, которую можно представить в виде двух подсистем для TE- и TM-мод. В рамках данной работы будут рассматриваться только TE-моды [2]. Редуцировав данную подсистему, получаем уравнение Гельмгольца для TE-моды [1]:

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + k_0^2 \varepsilon(x)\mu\right) E_y = 0. \tag{1}$$

Граничные и асимптотические условия для уравнения (1) имеют вид:

$$\begin{cases} E_y^{(1)}\Big|_{x=h,0} = E_y^{(2)}\Big|_{x=h,0}, \\ \dfrac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x}\Bigg|_{x=h,0} = \dfrac{\partial E_y^{(2)}}{\partial x}\Bigg|_{x=h,0}, \\ E_y \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0. \end{cases}$$

Применяем метод разделения переменных к уравнению Гельмгольца (1). В результате, мы получаем два уравнения: для поперечной и продольной частей [2]:

$$\Psi'' + k_0^2 n^2 (x)\, \Psi = k_0^2 \beta^2 \Psi, \tag{2}$$

$$U'' = -k_0^2 \beta^2 U, \tag{3}$$

где Ψ — функция только переменного x, U — функция только переменного z, $k_0^2\beta^2$ — постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, при этом ничего не предполагая о ее знаке. Сначала рассмотрим продольную часть. Поскольку в рамках волноводной задачи рассматривается регулярный однородный волновод, то решение уравнения (3) имеет вид [5]:

$$U = A \exp\left(ik_0\beta z\right) + B \exp\left(-ik_0\beta z\right).$$

Теперь рассмотрим поперечную часть. Решение уравнения (2) должно удовлетворять асимптотическим и граничным условиям. Для каждой подобласти выписываем решение уравнения (2) со своим показателем преломления [7]:

$$\begin{cases} \psi_c = A_c e^{-k_0\sqrt{\beta^2 - n^2}x}, \\ \psi_f = A_f \sin\left(k_0\sqrt{n_f^2 - \beta^2}x\right) + B_f \cos\left(k_0\sqrt{n_f^2 - \beta^2}x\right), \\ \psi_s = A_s e^{k_0\sqrt{\beta^2 - n_s^2}x}, \end{cases}$$

где ψ_c — решение для покровного слоя, ψ_f — решение для волноводного слоя, ψ_s — решение для подложки.

Составим систему из однородных линейных алгебраических уравнений (однородная СЛАУ), в которой уравнениями будут являться условия непрерывности решений на границах [1]:

$$\begin{cases} A_c - A_f \sin\left(p_f(\beta)\, h\right) - B_f \cos\left(p_f(\beta)\, h\right) = 0, \\ -A_c p_c(\beta) - A_f p_f(\beta) \cos\left(p_f(\beta)\, h\right) + B_f p_f(\beta) \sin\left(p_f(\beta)\, h\right) = 0, \\ B_f - A_s = 0, \\ A_f p_f(\beta) - A_s p_s(\beta) = 0, \end{cases}$$

где $p_f(\beta) = k_0\sqrt{n_f^2 - \beta^2}$, $p_c(\beta) = k_0\sqrt{\beta^2 - n_c^2}$, $p_s(\beta) = k_0\sqrt{\beta^2 - n_s^2}$.

Для определения искомых величин A_c, A_f, B_f и A_s необходимо решить однородную СЛАУ:

$$\mathbf{M}(\beta)\, \vec{A} = \vec{0}, \tag{4}$$

где $\vec{A}^T = \left(A_c, A_f, B_f, A_s\right)$ — вектор искомых амплитудных коэффициентов, а матрица $\mathbf{M}\left(\beta\right)$ имеет вид:

$$\mathbf{M}\left(\beta\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin\left(p_f\left(\beta\right)h\right) & -\cos\left(p_f\left(\beta\right)h\right) & 0 \\ -p_c\left(\beta\right) & -p_f\cos\left(p_f\left(\beta\right)h\right) & p_f\sin\left(p_f\left(\beta\right)h\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & p_f\left(\beta\right) & 0 & -p_s\left(\beta\right) \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы система (4) имела нетривиальное решение необходимо, чтобы определитель матрицы её коэффициентов был равен нулю [3]. Определим значения $beta$, численно найдя решения дисперсионного уравнения [2]:

$$\det\mathbf{M}\left(\beta\right) = 0.$$

График дисперсионных кривых показывает зависимость β от толщины волноводного слоя. На рис. 2 представлен график дисперсионных кривых для направляемых мод.

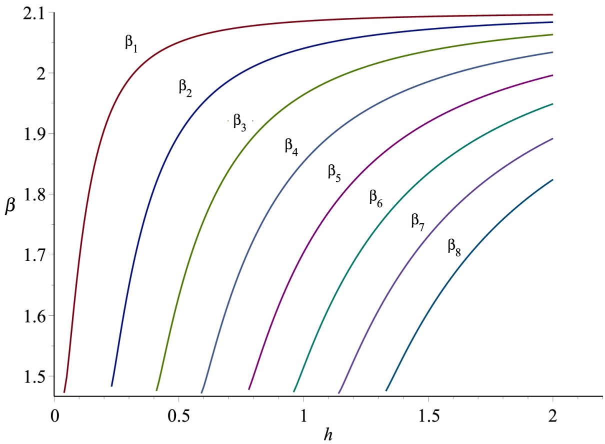

Рис. 2. График дисперсионных кривых

Рассмотрим решение волноводной задачи для направляемых мод. С помощью найденных β находим амплитудные коэффициенты. Далее подставляем найденные коэффициенты в решение уравнения (2) для разных слоев, тем самым получаем поперечную часть TE–моды [6].

На рис. 3 приведены графики поперечных частей TE–моды для регулярного однородного трехслойного открытого волновода ($n_c = 1$, $n_f = 2,10$, $n_s = 1,47$, $h = 0,55$ мкм, $\lambda = 0,55$ мкм).

В рамках решения данной волноводной задачи была использована система компьютерной алгебры Maple [4].

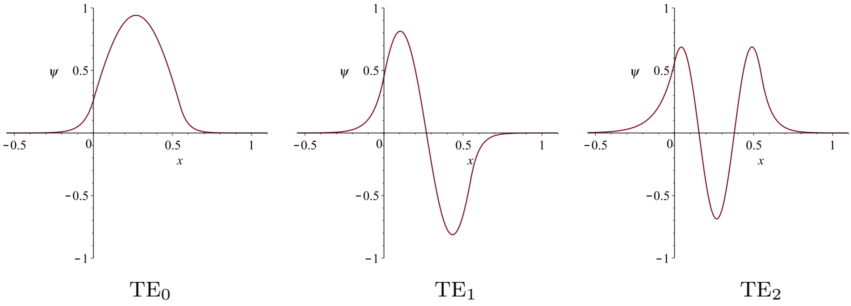

Рис. 3. График поперечных частей волноводных мод

3. Выводы

В рамках настоящей работы был рассмотрен метод решения волноводной задачи и было произведено численное моделирование распространения направленных волноводных мод. В качестве метода решения был выбран метод волнового сопряжения. Произведен численный расчет модельного примера, соответствующего регулярному однородному трехслойному открытому волноводу.

Литература

1. А. А Егоров, К. П. Ловецкий, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов, Интегральная оптика: теория и компьютерное моделирование: монография, Москва: РУДН, 2015.
2. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики. Под редакцией Г. П. Мотулевича, Москва: Наука, 1973.
3. Р. Беллман, Введение в теорию матрицу. Москва: Наука, 1973.
4. С. Е. Савотченко, Т. Г. Кузьмичева, Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие, Белгород: Издательство Белаудит, 2001.
5. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Физматлит, 2001.
6. E. A. Ayryan, A. A. Egorov, L. A. Sevastianov, K. P. Lovetskiy, A. L. Sevastyanov, Mathematical modeling of irregular integrated optical waveguides. Lecture Notes in Computer Science (2012), 7125, pp. 136–147. DOI: 10.1007/978-3-642-28212-6_12.
7. M. N. Gevorkyan, D. S. Kulyabov, K. P. Lovetskiy, A. L. Sevastyanov, L. A. Sevastyanov, Waveguide modes of a planar optical waveguide. Mathematical Modelling and Geometry (2015), 3, no. 1, pp. 43–63.