Stabilization of a Class of 3D Chaotic Systems Represented by the Takagi-Sugeno Fuzzy Model

Yuri V. Talagaev

Balashov Institute of National Research Saratov State University

Email: ytalagaev@yandex.ru

The paper deals with the generalized model describing a class of three-dimensional continuous chaotic systems that includes sample Lorenz, Chen and Lu systems. For this model a productive method of constructing a Takagi-Sugeno fuzzy model that allows approximating the dynamics of the initial system is presented. The peculiarity of fuzzy modeling is the presentation of nonlinear system as a convex combination of linear subsystems, weighted by membership functions. By describing global dynamics of the nonlinear system via local linear presentations we get a possibility of using the methods of linear system theory for the study of stability conditions and stabilizing control synthesis. In that context it is shown that transition to fuzzy description allows getting a solution of stabilization problem (chaos suppression) based on superstability conditions. The advantage of the found superstabilizing fuzzy regulator is the ability to provide such practically important feature of the transient process as monotonous decrease of the solution norm. If the system is subject to bounded perturbations, the estimation of the invariant set of the superstabilized system is possible. The results of numerical simulations of various chaotic systems that prove the efficiency of the presented method are shown.

Key words and phrases: chaotic system, fuzzy modeling, Takagi-Sugeno model, stabilization, superstability.

In: K. E. Samouilov, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov (eds.): Selected Papers of the VII Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems", Moscow, Russia, 24-Apr-2017, published at http://ceur-ws.org

Стабилизация класса 3D хаотических систем, представленного нечеткой моделью Такаги–Сугено

Ю. В. Талагаев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Балашовский институт

Email: ytalagaev@yandex.ru

В работе рассматривается обобщенная модель, описывающая класс трехмерных непрерывных хаотических систем, включающий эталонные системы Лоренца, Чена и Лю. Для данной модели представлен продуктивный способ конструирования нечеткой модели Такаги-Сугено, позволяющий аппроксимировать динамику исходной системы. Особенностью нечеткого моделирования является представление нелинейной системы в виде выпуклой комбинации линейных подсистем, взвешенных функциями принадлежности. Описание глобальной динамики нелинейной системы через локальные линейные представления открывает возможности использовать для исследования условий устойчивости и синтеза стабилизирующего управления методы теории линейных систем. В связи с этим показывается, что переход к нечеткому описанию позволяет получить решение задачи стабилизации (подавления хаоса) на основе условий сверхустойчивости. Достоинством найденного сверхстабилизирующего нечеткого регулятора является возможность обеспечить такую практически важную характеристику переходного процесса, как монотонное убывание нормы решения. В случае, если система подвержена действию ограниченного возмущения, становится возможна оценка инвариантного множества сверхстабилизированной системы. Представлены результаты численных экспериментов с различными хаотическими системами, подтверждающие эффективность представленного подхода.

Ключевые слова: хаотическая система, нечеткое моделирование, модель Такаги-Сугено, стабилизация, сверхустойчивость.

1. Введение

Нечеткие модели Такаги-Сугено (Takagi-Sugeno (T-S)) предоставляют эффективный способ аппроксимации динамики сложных систем, благодаря чему уже несколько десятков лет результативно применяются для их моделирования и управления [1]. Использование нечеткой T-S модели позволяет представить исследуемую нелинейную систему в виде взвешенной суммы простых линейных подсистем, что делает применимыми методы теории линейных систем управления. Разработаны различные подходы к решению задач анализа и управления нечеткими T-S моделями [2–4], однако, затруднения, вызываемые консервативностью применяемых условий устойчивости, оставляют актуальной разработку альтернативных подходов к анализу и синтезу нечетких систем.

Нечеткое моделирование является подходящим средством для описания и стабилизации хаотических систем. Условие ограниченности траекторий, необходимое для построения нечеткой модели, для хаотических систем выполнено естественным образом. К настоящему времени хаотические динамические системы имеют широкий спектр приложений (передача и защита информации, синхронизация и др.) и достаточно хорошо изучены с позиции конструирования и практической реализации. Развитие методов управления хаотическими системами актуальная область исследований и одним из способов пополнения ее новыми результатами является использование возможностей, которые предоставляет переход к нечеткому описанию.

В данной работе представлен общий способ описания класса хаотических систем в форме нечеткой T-S модели и стабилизации на основе условий свехустойчивости. Сверхустойчивость является практически важным свойством линейных систем управления, которое часто недоступно просто устойчивым системам. Формулируясь как ограничения на элементы матрицы системы, условия сверхустойчивости являются жесткими, но открывают эффективные способы решения ряда сложных задач управления (робастный синтез, подавление возмущений и др.). Сверхустойчивость сохраняется при наличии нелинейных возмущений. Поэтому применение условий сверхустойчивости к анализу и управлению хаотическими системами было начато в работах [5–7] напрямую без привлечения аппарата нечеткого моделирования. Несмотря на продуктивность, широта применения такого подхода ограничена трудно проверяемыми условиями, которым должна подчиняться нелинейная часть (возмущение) уравнений системы. Переход к представлению хаотической системы в форме нечеткой модели Такаги-Сугено снимает эти ограничения, поскольку нелинейная динамика описывается совокупностью локальных линейных представлений. Данная работа продолжает исследования в области анализа и синтеза сверхустойчивых нечетких систем Такаги–Сугено [8–10]. Особенности реализации подхода к синтезу сверхстабилизирующего нечеткого регулятора показываются и сравниваются на примере обобщенной нечеткой модели, представляющей эталонные хаотические системы.

2. Переход к нечеткому описанию

Рассмотрим класс 3D (размерность фазового пространства $n = 3$) хаотических систем, который задается в виде

$$\dot{x} = Ax + g(x) + Bu + Dw(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \Lambda \subset R^n$ – состояние системы ($\Lambda = \{x \in R^n : ||x(t)||_2 \leqslant \mu, \ \mu > 0\}$), $g(x)$ — нелинейная часть ($g(0) = 0$), $u(t) \in R^m$ — вход (управление), $w(t) \in R^{m_1}$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее для всех $t \geqslant 0$ ограничению $||w(t)||_\infty = \max_i |w_i(t)| \leqslant 1$, $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $D \in R^{n\times m_1}$ – постоянные матрицы. Если нелинейная часть $g(x)$ в (1) представлена квадратичными слагаемыми x_1x_2 и x_1x_3, то систему (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + x_1Gx + Bu + Dw(t), \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно [11], при выполнении условий $a_{12}a_{21} > 0$, $a_{12}a_{21} < 0$ и $a_{12}a_{21} = 0$ система (2), соответственно, приводит к следующим хаотическим системам:

1) системе Лоренца ($a_{12} = -a_{11} = a$, $a_{21} = c$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = -b$), демонстрирующей в отсутствии возмущения ($u(t) \equiv 0$, $w(t) \equiv 0$) хаотическую динамику при $a = 10$, $b = 8/3$, $c = 28$;

2) системе Чена ($a_{12} = -a_{11} = a$, $a_{21} = c - a$, $a_{22} = c$, $a_{33} = -b$), имеющей хаотический аттрактор при $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$;

3) системе Лю ($a_{12} = -a_{11} = a$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = c$, $a_{33} = -b$), у которой хаотическое поведение наблюдается при $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$.

Генерируемые (2) хаотические системы топологически не эквивалентны и имеют различные хаотические аттракторы. Система Чена является противоположной к системе Лоренца, система Лю занимает между ними промежуточное положение. Обсуждение различий и общих свойств этих систем можно найти в [12].

Рассмотрим общий способ аппроксимации хаотической системы (2) нечеткой T-S моделью. Используя ограниченность траекторий системы (2), допустим, что $x_1(t) \in [x_{\min}, x_{\max}] = [-L, L]$, где $L = 30$. Переход от (2) к ее нечеткому описанию (детали см., например, в [1, 10]) приводит к нечеткой T-S модели, которая задается двумя правилами

$$\text{П}l\text{: ЕСЛИ } x_1(t) \text{ есть } M_l, \text{ ТО } \dot{x}(t) = A_l x(t) + B_l u(t) + D_l w(t),\ l = 1, 2,$$

где матрицы A_1, A_2 линейных подсистем заданы как

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -L \\ 0 & L & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & L \\ 0 & -L & a_{33} \end{pmatrix}$$

и нечеткие множества M_1, M_2 имеют вид

$$M_1(x_1(t)) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_1(t)}{L}\right), \quad M_2(x_1(t)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_1(t)}{L}\right).$$

Определяемый в ходе дефаззификации выход нечеткой модели описывается общей системой

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{2} h_l(x_1(t))(A_l x(t) + B_l u(t) + D_l w(t)), \tag{3}$$

которая получается нечетким смешиванием линейных подсистем с функциями принадлежности

$$h_1(x_1(t)) = \frac{M_1(x_1(t))}{M_1(x_1(t)) + M_2(x_1(t))},$$

$$h_2(x_1(t)) = \frac{M_2(x_1(t))}{M_1(x_1(t)) + M_2(x_1(t))}$$

и дает целостное представление динамики (2) в пространстве состояний.

Далее предполагается, что невозмущенная ($u(t) \equiv 0$, $w(t) \equiv 0$) система (2) (а, значит, и соответствующая ей нечеткая модель (3)) имеет хаотическую динамику. Стабилизирующий нечеткий регулятор ищется в форме линейной статической обратной связи по состоянию

$$\text{П}l\text{: ЕСЛИ } x_1(t) \text{ есть } M_l, \text{ ТО } u(t) = K_l x(t),\ l = 1, 2,$$

где $_l \in R^{m \times n}$ — матрицы входов подсистем в (3). Общий нечеткий регулятор определяется аналогично (3) и имеет вид

$$u(t) = \sum_{l=1}^{2} h_l(x_1(t)) K_l x(t). \tag{4}$$

3. Стабилизация

Пусть $B_1 = B_2 = B$. Подставляя (4) в (3), приходим к замкнутой системе

$$\dot{x}(t) = \sum_{l=1}^{2} h_l(x_1(t))\,((A_l + BK_l)x(t) + D_l w(t)). \tag{5}$$

Используем для синтеза стабилизирующего нечеткого регулятора подход [10], основанный на использовании достаточных условий устойчивости — сверхустойчивости. Задача сверхстабилизации нечеткой системы (3) регулятором (4) состоит в нахождении матриц $_l$, обеспечивающих сверхустойчивость матриц $A_{c\,l} = (a^l_{c\ ij}) = A_l + B_l K_l$ замкнутой системы (5), т.е. выполнение условия $\min\limits_l \sigma(A_{c\,l}) > 0$, где степень сверхустойчивости $\sigma(A_{c\,l})$ определяется как

$$\sigma(A_{c\,l}) = \min_i \left(-a^l_{c\ ii} - \sum_{j \neq i} |a^l_{c\ ij}| \right), \quad i, j = 1, ..., n.$$

Если $B = I$, то удовлетворяющий условию сверхустойчивости $A_{c\,l}$ нечеткий регулятор (4) задается матрицами

$$K_1 = K_2 = -diag(k_1, k_2, k_3),$$

где $k_1 = |a_{12}| + a_{11} + \sigma_1$, $k_2 = |a_{21}| + |L| + a_{22} + \sigma_2$, $k_3 = |L| + a_{33} + \sigma_3$, а величины $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0$ выбираются так, чтобы обеспечить для (5) желаемую степень сверхустойчивости $\sigma(A_{c\,l})$.

Полученный нечеткий регулятор найден в общем виде и может быть использован для стабилизации динамики любой из хаотических систем, задаваемых формой (2). На рис. 1, 2, и 3, соответственно, представлены результаты сверхстабилизации системы Лоренца, Чена и Лю (слева — проекция хаотического аттрактора на плоскость (x_1, x_2), справа — переходной процесс стабилизированной системы).

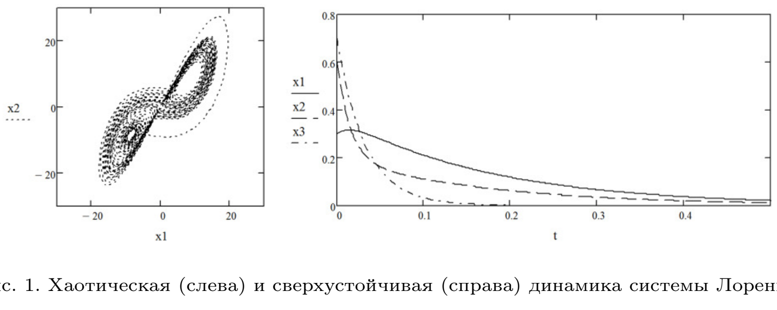

Рис. 1. Хаотическая (слева) и сверхустойчивая (справа) динамика системы Лоренца

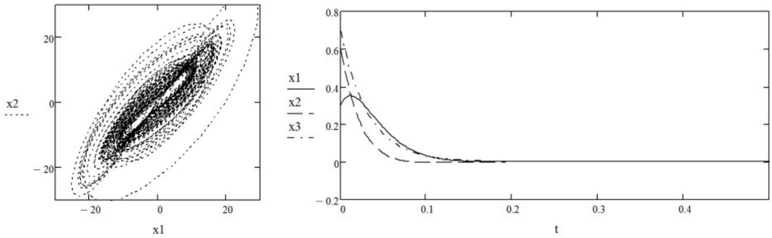

Рис. 2. Хаотическая (слева) и сверхустойчивая (справа) динамика системы Чена

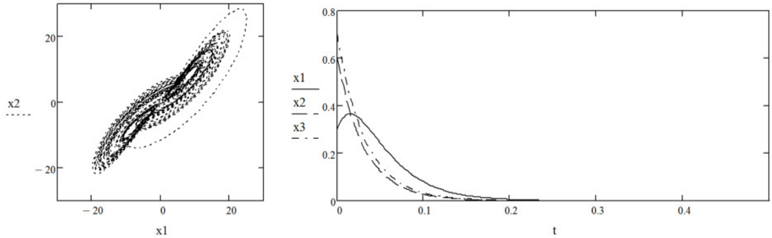

Рис. 3. Хаотическая (слева) и сверхустойчивая (справа) динамика системы Лю

Для удобства сопоставления в численном эксперименте выбиралось одинаковое начальное условие $x_0 = (0.3,\, 0.6,\, 0.7)$ и значение $\sigma(A_{c\,l}) = 1$. Сравнение результатов показывает, что для каждой хаотической системы полученный нечеткий регулятор обеспечивает свойственные сверхустойчивым системам практически важные свойства (см. [10]):

1) монотонное убывание ∞-нормы решения $||x(t)||_\infty \leqslant ||x_0||_\infty e^{-\sigma(A_{c\,l})\,t}$ при $w(t) \equiv 0$, что исключает возможность возникновение так называемого эффекта «всплеска» (резкий рост нормы решения на начальном этапе переходного процесса);

2) для всех $||x_0||_\infty \leqslant \lambda$ и допустимых $w(t)$ выполнено

$$||x(t)||_\infty \leqslant \lambda,$$

где

$$\lambda = \min_l(||D_l||_1/\sigma(A_{c\,l})),$$

что дает оценку инвариантного множества Q сверхустойчивой T-S нечеткой системы:

$$Q = \{x(t) \in R^n :\ ||x(t)||_\infty \leqslant \lambda\}.$$

Отметим, что представленные результаты получены для случая, когда $B_1 = B_2$. Особенности стабилизации в общем случае (матрицы B не идентичны) и пример стабилизации гиперхаотической системы ($n = 4$) рассмотрены в [10].

4. Заключение

Представлен общий способ построения нечеткой T-S модели, которая аппроксимирует динамику класса хаотических систем. Показано, что переход к нечеткому описанию дает возможность задействовать условия сверхустойчивости для построения нечеткого регулятора, позволяющего стабилизировать неустойчивую динамику выбранной хаотической системы. Осуществленное в ходе компьютерного моделирования сравнение результатов сверхстабилизации хаотической динамики систем Лоренца, Чена и Лю показало, что переходной процесс каждой стабилизированной системы обладает свойствами, присущими сверхустойчивым системам (∞-норма решения монотонно убывает и ограничена при наличии ограниченных возмущений).

Литература

1. K. Tanaka, H. O. Wang, Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. New York: Wiley, 2001, 305 p.
2. G. Feng, Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach. New York: CRC Press, 2010. 299 p.
3. H.-K. Lam, F.H.F. Leung, Stability Analysis of Fuzzy-Model-Based Control Systems: Linear-Matrix-Inequality Approach. Berlin: Springer, 2011. 226 p.
4. О. В. Дружинина, О. Н. Масина, Методы анализа устойчивости динамических систем интеллектного управления. Москва: URSS, 2016. 242 с.
5. Ю. В. Талагаев, А. Ф. Тараканов, Сверхустойчивость и оптимальное многопараметрическое подавление хаотической динамики класса автономных систем с квадратичными нелинейностями, Дифференциальные уравнения. Январь 2012. Т. 48, no. 1, С. 148–152.
6. Y. V. Talagaev, Robust analysis and superstabilization of chaotic systems, Proc. 2014 IEEE Conference on Control Applications. Antibes, France, 2014, pp. 1431–1436.
7. Ю. В. Талагаев, Анализ условий сверхустойчивости и оптимальная коррекция параметров класса хаотических систем, Системы управления и информационные технологии (2014), Т. 55, no. 1.1, С. 198–204.
8. Y. V. Talagaev, An Approach to Analysis and Stabilization of Takagi-Sugeno Fuzzy Control Systems Via Superstability Conditions, IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnLine), June 2015, Vol. 48, no. 11, pp. 426–433.
9. Y. V. Talagaev, Robust analysis and output feedback controller design of Takagi-Sugeno fuzzy systems via superstability conditions, IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnLine), July 2015, Vol. 48, no. 14, pp. 290–295.
10. Ю. В. Талагаев, Анализ и синтез сверхустойчивых нечетких систем Такаги–Сугено, Проблемы управления (2016), no. 6, С. 2–11.
11. J. Lu, G. Chen, D. Cheng, A new chaotic system and beyond: the generalized Lorenz-like system, Int. J. of Bifurcation and Chaos (2004), Vol. 14, no. 5, pp. 1507–1537.
12. G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lu systems, Applied Mathematics and Computation (2015), Vol. 256, pp. 334–343.