
Probability Characteristics Evaluation in Queueing System with Random Requirements

Eduard S. Sopin^{‡§}, Olga G. Vikhrova[‡]

[‡] Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

[§] Institute of Informatics Problems

Federal Research Center "Computer Science and Control"

Email: sopin_es@rudn.university, vikhrova_og@rudn.university

We suggest a recursive algorithm for calculating the stationary probabilities and probability characteristics of queueing system with random resource requirements. Consider the system with multiple classes of resource requirements described by a random vector. Each class of customers requires a random vector of resources to be served. Unlike to well-known models with constant requirements of resource units we analyse model with random requirements with both discrete and continuous resources. The key difference from already analysed model with random requirements concerns the volume of released resources at the end of customer service. General model requires to store all vectors of occupied resources, while described model deals with the total volume of occupied resources. Upon departure from the system, customer releases not the same volume of resources as it occupied, but some random volume which is independent from previous system's state and incoming flow. It was proved that in case of Poisson arrivals and exponential service time the general system is equivalent to the simplified system that deals with only total amount of occupied resources. Proposed simplification lowers the complexity of calculation algorithms. Then, we consider aggregation of customers with the same class of requirements. Summing up stationary probabilities over each class, we derived a formula for the normalized average requirement. The computing performance significantly depends on length of vector of resources and number of customers. To avoid calculating of all k-fold convolutions for each set of vectors we suggest the recursive algorithm. The algorithm is applied for calculation of blocking probability and vector of average occupied resources. Queueing system with random resource requirements adequately models radio resource allocation in modern heterogeneous networks and forthcoming 5G networks.

The work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.A03.21.0008) and is partially supported by RFBR research projects No 15-07-03051, 16-07-00766.

Key words and phrases: queueing system with random requirements, limited resource, recursive algorithm, normalization constant, heterogeneous networks.

Вычисление вероятностных характеристик СМО со случайными требованиями

Э. С. Сопин^{‡§}, О. Г. Вихрова[‡]

[‡] *Российский университет дружбы народов*

[§] *Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН*

Email: sopin_es@rudn.university, vikhrova_og@rudn.university

Разработан алгоритм вычисления стационарных вероятностей и ключевых вероятностных характеристик системы массового обслуживания (СМО) с ограниченным ресурсом и случайными требованиями. Рассматривается система со случайными требованиями нескольких классов, в которой каждой заявке для обслуживания необходимо выделить некоторый случайный вектор ресурсов. Отличие рассматриваемой исследуемой модели от классических ресурсных моделей теории массового обслуживания заключается в занятии не фиксированного количества единиц ресурса, а некоторого случайного объема, который может быть задан как непрерывной, так и дискретной случайной величиной. В отличие от известных моделей со случайными требованиями, предполагается, что поступившая на обслуживание заявка занимает случайный объем ресурсов, при этом по завершении обслуживания заявки будет освобожден также некоторый случайный объем ресурсов, отличный от занятого. Вместо того, чтобы запоминать для каждой заявки вектор занятых ею ресурсов, в рассматриваемой модели достаточно определить объем ресурсов, занимаемый всеми заявками. Предположение о суммарном объеме занятых ресурсов существенно упрощает дальнейший анализ случайного процесса во времени и уменьшает размерность пространства состояний СМО. Данное предположение было доказано для системы с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания заявок: стационарные вероятности и вероятностные характеристики исходной и упрощенной моделей эквивалентны.

Объединение требований нескольких классов в один поток заявок со средневзвешенным требованием позволило упростить формулы для вычисления вероятности блокировки системы и среднего объема занятых ресурсов. К полученным формулам применяется разработанный рекуррентный алгоритм, который позволяет существенно сократить время вычислений и использование вычислительных ресурсов. Предложенная модель с ограниченным ресурсом и случайными дискретными требованиями применима к анализу показателей качества беспроводных сетей связи четвертого и пятого поколений.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 02.А03.21.0008), а также при поддержке РФФИ в рамках проектов № 15-07-03051, 16-07-00766.

Ключевые слова: СМО с ограниченным ресурсом, требования случайного объема, нормировочная константа, рекуррентный алгоритм, гетерогенная сеть.

1. Введение

В классических моделях Эрланга или Келли [1] требования в СМО задаются постоянными величинами, которые, например, могут определять количество единиц канального ресурса, необходимого для обслуживания сессии. Авторами рассматривается модель со случайными требованиями, которые могут быть заданы как непрерывными, так и дискретными случайными величинами. Впервые СМО со случайными требованиями были описаны в [2]. В [3] получено общее решение системы в предположении о пуассоновском входящем потоке и экспоненциальном времени обслуживания заявок. Анализ модели с ограниченным ресурсом и случайными требованиями был продолжен в [4]. Рассматривается СМО с рекуррентным

входящим потоком и случайными требованиями M типов. Поступившая в систему заявка требует случайный вектор ресурсов и занимает выделенный ей ресурс на все время обслуживания. По окончании обслуживания заявки освобождается в точности тот объем ресурсов, который изначально выделялся. В этом случае необходимо запоминать вектор занятых ресурсов для каждой заявки в системе. Пространство состояний системы состоит из k подмножеств всех векторов длины $k(M+1)+2$, анализ системы при больших значениях k числа заявок затруднителен. Предлагается по завершении обслуживания заявки освобождать некоторый случайный вектор ресурсов, не зависящий от поведения системы в прошлом при заданном числе заявок k и общем объеме занятых ресурсов. Для упрощенной модели не нужно запоминать векторы занятых ресурсов, достаточно знать объем ресурсов, занятых всеми заявками. В [5] было доказано, что стационарные вероятности исходной системы эквивалентны стационарным вероятностям упрощенной системы в случае пуассоновского входящего потока и экспоненциального времени обслуживания заявок.

В [6] и [7] анализируется многолинейная СМО со случайными требованиями нескольких классов и ограниченным ресурсом. Требования к ресурсу определяют непрерывная случайная величина с функцией распределения $F(\mathbf{x})$. Для данной системы были получены аналитические формулы для вычисления стационарных вероятностей, а также были найдены ключевые вероятностные характеристики. Для исследования задачи разделения ресурсов в беспроводных каналах передачи данных в гетерогенных сетях связи в [8] анализируется СМО со случайными требованиями, выраженными дискретной случайной величиной. В более общем случае модель была исследована в [9]. Авторы предлагают к исследованию многолинейную СМО с дискретными случайными требованиями нескольких классов к множественным ресурсам. Получены формулы для вычисления стационарных вероятностей СМО, вероятности блокировки системы и среднего объема занятых ресурсов. В [10] доказано, что стационарные вероятности системы с требованиями нескольких классов эквивалентны стационарным вероятностям СМО со средневзвешенным требованием. Для полученной модели с агрегированным потоком требований были получены основные вероятностные характеристики.

Формулы для нахождения стационарных вероятностей системы требуют вычисления k -кратных сверток для каждого $k = 0, \bar{N}$ и для всех возможных наборов векторов длины M . В данной работе разработан рекуррентный алгоритм вычисления нормировочной константы, существенно упрощающий вычисление стационарных вероятностей СМО, вероятности блокировки и средний объем занятых ресурсов.

2. Описание модели

По мнению экспертов инфокоммуникационной отрасли, к 2020 году произойдет полномасштабное развёртывание инфраструктур технологии 5G [11, 12]. Изменения позволят улучшить скорость передачи данных в мобильных сетях [13], а также будут способствовать дальнейшему развитию гетерогенных сетей [14] и нового класса прямых соединений устройств D2D [15]. Гетерогенная организация современных беспроводных сетей является доступным и бюджетным способом повысить пропускную способность современных сетей LTE. Предполагается, что концепция разделение ВК и НК, предложенная в [16], позволит существенно улучшить показатели качества в ВК и сбалансировать нагрузку в макросоте а также повысить эффективность использования радио ресурсов. Приведенные в [17, 18] результаты исследований свидетельствуют о снижении уровня интерференции в ВК и повышении скорости передачи данных. Существующие модели разделения радиоресурсов в гетерогенных сетях позволяют моделировать их только в статичном состоянии.

Рассматриваемая модель позволяет проводить анализ характеристик сети с учетом динамики установления соединений.

Исследуется многолинейная СМО с ограниченным ресурсом, заданным вектором $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_M)$. В систему поступает пуассоновский поток заявок L классов с интенсивностями λ_l , каждый из которых требует случайный вектор $\mathbf{r}_l = (r_{1l}, \dots, r_{Ml})$ ресурсов, векторы \mathbf{r}_l независимы от входящего потока и независимы в совокупности требования к ресурсу m -го типа. Времена обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_l , независимы от процесса поступления заявок и независимы в совокупности. Пусть заявка l -го класса занимает \mathbf{r}_l единиц ресурсов с вероятностью p_{l,\mathbf{r}_l} , тогда k_l таких заявок будут

занимать \mathbf{r} единиц ресурсов с вероятностью $p_{l,\mathbf{r}}^{(k_l)}$, где $p_{l,\mathbf{r}}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\mathbf{R}} p_{l,\mathbf{r}} p_{l,\mathbf{r}}^{(k-1)} - k$ -кратная свертка вероятностей $p_{l,\mathbf{r}}$. Стационарные вероятности СМО могут быть найдены по формулам (1) и (2):

$$q_{1,\dots,L}^n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_L) = q_0 \sum_{k_1 + \dots + k_L = n} p_{1,\mathbf{r}_1}^{(k_1)} \dots p_{L,\mathbf{r}_L}^{(k_L)} \frac{\rho_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{\rho_L^{k_L}}{k_L!}, \quad (1)$$

$$q_0 = \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k_1 + \dots + k_L = n} \sum_{\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_L = \mathbf{R}} p_{1,\mathbf{r}_1}^{(k_1)} \dots p_{L,\mathbf{r}_L}^{(k_L)} \frac{\rho_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{\rho_L^{k_L}}{k_L!} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Поступающий поток заявок нескольких классов может быть объединен в один поток средневзвешенных требований с $p_{\mathbf{r}_l} = \sum_{l=1}^L \frac{\rho_l}{\rho} p_{l,\mathbf{r}_l}$ — вероятностью того, что всеми заявками l -го класса будет занято \mathbf{r}_l единиц ресурса. В этом случае стационарные вероятности могут быть найдены по формулам (3), (4):

$$q^n(\mathbf{r}) = q_0 p_{\mathbf{r}}^{(n)} \frac{\rho^n}{n!}, \quad (3)$$

$$q_0 = \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\vec{r}=0}^{\vec{R}} p_{\mathbf{r}}(n) \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}, \quad (4)$$

а, следовательно, и основные вероятностные характеристики, такие как вероятность блокировки системы (5) и средний объем занятых ресурсов (6):

$$B = 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{j}}^{\mathbf{R}} p_{\mathbf{j}}^{(n+1)}, \quad (5)$$

$$\mathbf{b} = q_0 \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{j}}^{\vec{R}} \mathbf{j} p_{\mathbf{j}}^{(n)}. \quad (6)$$

3. Алгоритм вычисления нормировочной константы

Для расчетов характеристик СМО по формулам (5), (6) необходимо для каждого $k \in \{0, \dots, N\}$ и всех наборов векторов $\mathbf{r} \leq \mathbf{R}$ хранить в памяти компьютера значения свертков вероятностей $p_{\mathbf{r}}$. При больших значениях N и \mathbf{R} , вычисление блокировок СМО и объемов занятого ресурса по полученным формулам нерационально. Чтобы сократить время вычисления характеристик был разработан рекуррентный алгоритм вычисления нормировочной константы $G(N, \mathbf{R}) = q_0^{-1}$. Также были получены рекуррентные формулы для нахождения вероятностных характеристик СМО. В основе алгоритма лежит принцип, описанный в [19], известный как алгоритм Бузена. Введем обозначение

$$G(n, \mathbf{r}) = \sum_{k=0}^n \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{j}}^{(k)} \frac{\rho^k}{k!}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{r} \geq \mathbf{0}.$$

Теорема. Функция $G(n, \mathbf{r})$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (7) с начальными условиями (8)

$$G(n, \mathbf{r}) = G(n-1, \mathbf{r}) + \frac{\rho}{n!} \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{j}} (G(n-1, \mathbf{r}-\mathbf{j}) - G(n-2, \mathbf{r}-\mathbf{j})), \quad (7)$$

$$G(0, \mathbf{r}) = 1, \mathbf{r} \geq \mathbf{0}, \quad G(1, \mathbf{r}) = 1 + \rho \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{j}}. \quad (8)$$

Доказательство. Определим шаг индукции:

$$\begin{aligned} G(n, \mathbf{r}) - G(n-1, \mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^N \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} p_{\mathbf{r}}^{(n)} \frac{\rho^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} p_{\mathbf{r}}^{(n)} \frac{\rho^n}{n!} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} p_{\mathbf{r}}^{(n)} = \\ &= \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{i}=0}^{\mathbf{j}} p_{\mathbf{i}} p_{\mathbf{j}-\mathbf{i}}^{(n-1)} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{i}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{j}-\mathbf{i}}^{(n-1)} = \\ &= \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{i}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{i}} \left(\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}-\mathbf{i}} p_{\mathbf{j}}^{(n-1)} \right) = \\ &= \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{j}} (G(n-1, \mathbf{r}-\mathbf{j}) - G(n-2, \mathbf{r}-\mathbf{j})). \end{aligned}$$

Следствие 1. Вероятность блокировки системы B может быть вычислена по формуле (9):

$$B = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{R}} p_{\mathbf{j}} G(N-1, \mathbf{R}-\mathbf{j}). \quad (9)$$

Доказательство. Аналогично из (5) получена вероятность блокировки СМО:

$$\begin{aligned}
B &= 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=0}^{\mathbf{R}} p_j^{(n+1)} = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=0}^{\mathbf{R}} \sum_{i=0}^j p_i p_{j-i}^{(n)} = \\
&= 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{i=0}^{\mathbf{R}} p_i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=0}^{\mathbf{R}-i} p_j^{(n)} = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{j=0}^{\mathbf{R}} p_j G(N-1, \mathbf{R}-j).
\end{aligned}$$

Следствие 2. Средний объем занятых ресурсов \mathbf{b} можно вычислить по формуле (10):

$$\mathbf{b} = \mathbf{R} - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{i=1}^{R_m} G(N, \mathbf{R} - i\mathbf{e}_m). \quad (10)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &= \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{j=r}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N q_n(\mathbf{j}) = \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{j=r}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N G^{-1}(N, \mathbf{R}) \frac{\rho^n}{n!} p_j^n = \\
&= G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \left(\sum_{j=0}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_j^n - \sum_{j=r}^{\mathbf{R}-r} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_j^n + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_r^n \right) = \\
&= G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \left(G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{R} - r) + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_r^n \right) = \\
&= \mathbf{R} - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{i=1}^{R_m} G(N, \mathbf{R} - i\mathbf{e}_m).
\end{aligned}$$

Следствие 3. Дисперсия среднего числа занятых ресурсов может быть вычислена по формуле (11), где $\mathbf{b}^2 = (b_1^2, \dots, b_M^2)$:

$$\sigma^2 = \mathbf{b}^{(2)} - \mathbf{b}^2, \quad (11)$$

$$\mathbf{b}^{(2)} = 2 \left[\mathbf{b} + G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} (G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{r})) \right].$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^{(2)} &= 2 \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} \sum_{j=r}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N q_n(\mathbf{j}) = 2 \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} \sum_{j=r}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N G^{-1}(N, \mathbf{R}) \frac{\rho^n}{n!} p_j^n = \\
&= 2G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} \left(\sum_{j=r}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_j^n - \sum_{j=0}^{\mathbf{R}-r} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_j^n + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_r^n \right) = \\
&= 2G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} \left(G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{R} - j) + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_r^n \right) =
\end{aligned}$$

$$= 2 \left[\mathbf{b} + G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} (G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{r})) \right].$$

4. Выводы

Получены рекуррентные формулы для вычисления стационарных вероятностей, вероятности блокировки, вектора среднего объема занятых ресурсов и дисперсии модели с ограниченными ресурсами и случайными требованиями. Разработан рекуррентный алгоритм вычисления нормировочной константы, существенно упрощающий анализ СМО и вычисление ее ключевых вероятностных характеристик.

Литература

1. F. P. Kelly, Loss Networks. The Annals of Applied Probability (1991), Vol. 1, no. 3, pp. 319–378.
2. O. M. Tikhonenko, Generalized Erlang problem for service systems with finite total capacity, Problems of Information Transmission (2005), 41 (3), pp. 243–253.
3. V. A. Naumov, K. E. Samouylov, On the modeling of queuing systems with multiple re-sources, Bulletin of PFUR. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (2014), no. 3, pp. 58–62 [in Russian].
4. V. A. Naumov, K. E. Samuilov, A. K. Samuilov, On the total amount of resources occupied by serviced customers, Automation and Remote Control (2016), Vol. 77, issue 8, pp. 1419–1427.
5. V. Naumov, K. Samuoylov, E. Sopin, S. Andreev, Two approaches to analysis of queuing systems with limited resources, IEEE: Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 2014, pp. 485–488.
6. K. Samouylov, E. Sopin, O. Vikhrova, Analyzing Blocking Probability in LTE Wireless Network via Queuing System with Finite Amount of Resources, Communications in Computer and Information Science (2015), Vol. 564, pp. 393–403.
7. O. M. Tikhonenko, Destricted Capacity Queueing Systems: Determination of their Characteristics, Automation and Remote Control (1997), Vol. 58, no. 6, pp. 969–973.
8. E. Sopin, K. Samouylov, O. Vikhrova, R. Kovalchukov, D. Moltchanov, A. Samuylov, Evaluating a case of downlink uplink decoupling using queuing system with random requirements, Lecture Notes in Computer Science (2016), Vol. 9870, pp. 440–450.
9. K. Samouylov, E. Sopin, O. Vikhrova, On design of efficient algorithm for blocking probability calculation in queuing system with random requirements, 15th International Scientific Conference (ITMM), 2016, Vol. 1, pp. 192–197.
10. V. Naumov, K. Samouylov, E. Sopin, N. Yarkina, S. Andreev, A. Samuylov, LTE Performance Analysis Using Queuing Systems with Finite Resources and Random Requirements, IEEE: 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 2015, pp. 100–103.
11. Ericsson mobility report, Ericsson AB, 2015, <https://www.ericsson.com/mobility-report>
12. Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2014–2019, <http://www.cisco.com/c/en/us/>

- [solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/mobile-white-paper-c11-520862.html](#)
13. J. Andrews, H. Claussen, M. Dohler, S. Rangan, Femtocells: Past, Present, and Future, *IEEE JSAC*, 2012, Vol. 30, no. 3, pp. 497–508.
 14. J. Lee, H. Wang, J. Andrews, D. Hong, Outage Probability of Cognitive Relay Networks with Interference Constraints, *IEEE Trans. Wir. Comm.* (2011), Vol. 10, no. 2, pp. 390–395.
 15. G. Fodor, S. Parkvall, S. Sorrentino, P. Wallentin, Q. Lu, N. Brahma, Device-to-Device Communications for National Security and Public Safety, *IEEE Access* (2014), Vol. 2, no. 1, pp. 1510–1520.
 16. F. Boccardi, J. Andrews, H. Elshaer, M. Dohler, S. Parkvall, P. Popovski, S. Singh, Why to Decouple the Uplink and Downlink in Cellular Networks and How To Do It, *IEEE Communications Magazine* (2016), Vol. 54, no. 3, pp. 110–117.
 17. S. Singh, X. Zhang, J. Andrews, Joint Rate and SINR Coverage Analysis for Decoupled Up-link-Downlink Biased Cell Associations in HetNets, *Wireless Communication. IEEE Trans. Wireless Commun* (2015), Vol. 14, no. 10, pp. 5360–5373.
 18. H. Elshaer, F. Boccardi, M. Dohler, R. Irmer, Downlink and Uplink Decoupling: A disruptive architectural design for 5G networks, *Global Communications Conference (GLOBECOM)*, 2014, pp. 1798–1803.
 19. J.P. Buzen, Computational algorithms for closed queueing networks with exponential servers, *Communications of the ACM* (1973), 16(9), pp. 527.