About Some Two-level Models of Optimization of Tax Schemes

Sergey M. Antsyz[1,2] and Tatiana V. Vysotskaya

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue, 630090, Novosibirsk, Russia
[2] Novosibirsk State University,
1 Pirogova Str., 630090, Novosibirsk, Russia
antzys.nsc.ru

Abstract. A new approach to modeling complex economic systems is proposed. Using this approach, the following model hierarchical system "the state - investors"is constructed. The country fixes the amount of tax collection and determines the minimum tax rates required to obtain this amount at provided that investors maximize their income. In the proposed model the progressive tax model is better than the flat tax scale.

Keywords: Hierarchical systems · Taxation Schemes · Bilevel mathematical programming · Aachieving the desired result

In: S. Belim et al. (eds.): OPTA-SCL 2018, Omsk, Russia, published at http://ceur-ws.org

О некоторых двухуровневых моделях оптимизации налоговых схем ⋆

Сергей М. Анцыз[1,2], Татьяна В. Высоцкая

[1] Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Проспект ак. Коптюга 4, 630090, Новосибирск, Россия
[2] Новосибирский государственный университет,
Пирогова 1, 630090, Новосибирск, Россия
antzys@math.nsc.ru

Аннотация Предложен новый подход к моделированию сложных экономических систем. С использованием данного подхода построена следующая модель иерархической системы "государство - инвесторы". Государство фиксирует объем налоговых сборов и определяет минимальные размеры налоговых ставок, необходимые для получения этого объема при условии, что инвесторы максимизируют свои доходы. В предложенной модели прогрессивный налог оказывается лучше пропорционального.

Ключевые слова: иерархические системы, схемы налогообложения, двухуровневое программирование, достижение заданного результата

1 Введение

В [1] рассматривалась задача максимизации налоговых сборов, и было показано, что результаты, которые получаются при прогрессивном налоге на прибыль, лучше, чем результаты, получающиеся при плоской шкале налогообложения. Предполагалось, что государство устанавливает параметры налоговых ставок, а инвесторы при заданной схеме налогов определяют векторы продуктов и ресурсов такие, что достигает максимума их прибыль. В [2] был предложен специальный алгоритм композиции локальных планов подсистем сложных социально-экономических систем. Алгоритм базировался на подходе: достичь заданного результата с наименьшими затратами ресурсов. В настоящей работе этот подход используется для исследования моделей возмещения ущерба, наносимого деятельностью инвесторов окружающей среде.

⋆ Работа выполнена при поддержке РГНФ (проект 16-02-00049) и РФФИ (проекты 16-06-00046, 16-06-00101 и 16-01-00108).

2 Основные определения

Рассмотрим модель региона, в котором содержится управляющий Центр и предприятия (инвесторы). В результате деятельности предприятий окружающей среде наносится ущерб. Центр управления регионом определяет для всех предприятий сумму "экологического" налога, направленного на восстановление окружающей среды и на модернизацию производства. При своем функционировании предприятия используют различные ресурсы. Ресурсами являются как природные материалы: сырье, химические вещества и т.п., так и такие ресурсы, как производственные площади, персонал и т.д. Результат деятельности предприятия выражается в полученной прибыли.
Введем индексы:
k – индекс элемента модели, $k \in \mathcal{K}$ (множество номеров предприятий); $J_1 = \{1, \ldots, j_1\}$ – множество индексов продуктов, выпускаемых предприятиями; $J_2 = \{1, \ldots, j_2\}$ – индексы ресурсов различного вида, используемых в процессе производства.

Будем рассматривать процесс в течение промежутка времени, который разобьем на T тактов. Все параметры и переменные считаем постоянными в течение одного такта и изменяющимися в момент начала следующего такта, $t = \overline{1, T}$ – номер текущего такта.
Далее введем следующие обозначения: $X_{kt} = \{x_{ktj}, j \in J_1\}$ – вектор объема продуктов, выпускаемых k-ым предприятием в период времени t; $Y_{kt} = \{y_{ktj}, j \in J_2\}$ – вектор объема ресурсов, приобретаемых k-ым предприятием в период времени t; $Y_{k0} = \{y_{k0j}, j \in J_2\}$ – вектор запасов ресурсов у k-го предприятия в начальный момент времени; $A_{kt} = \{a_{ktij}, i \in J_2, j \in J_1\}$ – матрица коэффициентов использования ресурсов k-ым предприятием для производства единицы продукта в период времени t; $C_{kt} = (C^1_{kt}, C^2_{kt}) = \{C^1_{ktj}, j \in J_1; C^2_{ktj}, j \in J_2\}$ – вектор цен на продукты и ресурсы соответственно для k-го предприятия в период t.

Заметим, что компоненты различных векторов C_{kt}, соответствующие одному и тому же продукту или ресурсу, равны. Заметим также, что достоверно известны только векторы C_{k0}. В [3] была предложена методика прогноза цен, дальнейшее развитие которой приведено в [4]. Для того, чтобы построить описанные ниже модели, можно либо использовать эту методику, либо полагать $C_{k1} = C_{k2} = \ldots = C_{kT} = C_{k0}$.

Для k-го предприятия введем функционал прибыли, который отражает количество денег, оставшееся у предприятия после реализации его продукции, услуг и т.п. за вычетом расходов на приобретение ресурсов (валовая прибыль):

$$\phi_k = \sum_{t=1}^{T} \left[C^1_{kt} X_{kt} - C^2_{kt} Y_{kt} \right]. \tag{1}$$

Из этих денег производится выплата налогов d_{kt} за ущерб окружающей среде, нанесенный деятельностью предприятия. Величины d_{kt} (они одновременно являются квотами) устанавливает Центр.

Для определения степени загрязнения окружающей среды, а также ущерба от использования ресурсов введем "коэффициенты загрязнения":

$p^1_{kt} = \{p^1_{ktj}, j \in J_1\}$ – вектор коэффициентов вредности продуктов, выпускаемых k-ым предприятием в период времени t; $p^2_{kt} = \{p^2_{ktj}, j \in J_2\}$ – вектор коэффициентов вредности использования ресурсов k-ым предприятием в период времени t.

Векторы p^1_{kt} и p^2_{kt} считаются известными, а их размерности таковы, что скалярные произведения $p^1_{kt}X_{kt}$ и $p^2_{kt}Y_{kt}$ имеют размерности тех единиц, в которых определяется налог.

В качестве экономического регулятора используются пропорциональный или прогрессивный налоги на прибыль предприятий. Целью работы является математический анализ возможности регулирования экономической системы с помощью той или иной схемы налогообложения, определение области результативности этой схемы, в том числе при решении задачи сохранения пропорций производства.

3 Исследование модели с плоской шкалой налогообложения

Рассмотрим ситуацию, когда Центр действует двухэтапно: сначала он планирует выделяемые квоты на нанесения ущерба, а затем собирает налоги в зависимости от реально полученной предприятиями прибыли.

Пусть реально собираемый налог – функция от прибыли $\Psi(M_{kt})$, где

$$M_{kt} = C^1_{kt}X_{kt} - C^2_{kt}Y_{kt}.$$

Предполагается, что $M_{kt} > 0$.

В данном разделе рассмотрим случай, когда налог является линейной функцией от прибыли, т.е.

$$\Psi(M_{kt}) = \chi M_{kt}, \quad \text{где} \quad 0 < \chi \leq 1.$$

Соответственно, задача Центра - определить оптимальные ставку налога χ и величины квот d_{kt}.

Функционал верхнего уровня Z в этом случае будет иметь вид:

$$Z = \min_{k \in \mathcal{K}, t=\overline{1,T}} \left[\frac{p^1_{kt}X_{kt} + p^2_{kt}Y_{kt}}{\chi M_{kt}} \right]. \tag{2}$$

Сумма D, которую необходимо собрать Центру, не разделена по периодам, а является общей за весь рассматриваемый промежуток времени.

Введем еще одно обозначение. Пусть $b_{k0} = C^2_{k0}Y_{k0}$ – начальный капитал предприятия.

Таким образом, имеем задачу (ЗПШН) следующего вида.

Определить величины d_{kt} и χ такие, что если X_{kt}, Y_{kt} являются решением задач линейного программирования

$$A_{kt}X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t} Y_{k\tau} \leq Y_{k0}, \quad t = \overline{1,T}, \tag{3}$$

$$X_{kt} \geq 0, Y_{kt} \geq 0, \quad t = \overline{1,T}, \tag{4}$$

$$p^1_{kt}X_{kt} + p^2_{kt}Y_{kt} \leq d_{kt}, \quad t = \overline{1,T}, \tag{5}$$

$$C_{kt}^2 Y_{kt} \le b_{k0} + (1-\chi) \sum_{\tau=1}^{t-1} \left(C_{k\tau}^1 X_{k\tau} - C_{k\tau}^2 Y_{k\tau} \right), \quad t = \overline{1,T}, \tag{6}$$

$$\phi_k \to \max! \tag{7}$$

и выполняются условия

$$\chi \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} M_{kt} \ge D, \tag{8}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} d_{kt} \le D, \tag{9}$$

$$0 < \chi \le 1, \tag{10}$$

то

$$Z \to \max!, \tag{11}$$

где Z определен в (2).

В [5] рассматривалась двухуровневая задача (З1), в которой на уровне предприятий не учитывались ограничения (6), функционал верхнего уровня совпадал с (11) и ограничение (9) полагалось равенством. Был предложен алгоритм F1 полиномиальной сложности определения квот d_{kt} для этой задачи. Предполагалось, что в случае, когда задача предприятия (3)-(5), (7) имеет не единственное решение, Центр может требовать от предприятия выбрать тот план, при котором ущерб среде будет минимальным. Моделируя поведение Центра, построим двухэтапный процесс с учетом этого предположения. На первом этапе решаем задачу (З1), применяя к ней алгоритм F1, и таким образом определяем квоты d_{kt}. Затем при фиксированных d_{kt} определяем оптимальную ставку налогообложения χ для линейного налога, решая задачу (ЗПШН).

Исследуем функционал (2) и функционалы ϕ_k из задач (3) - (7) и докажем несколько утверждений об их свойствах.

Лемма 1. *$\phi_k(\chi)$ есть невозрастающая функция параметра χ.*

Доказательство. Пусть $\chi_1 < \chi_2$. Заметим, что векторы $X_{kt}(\chi_2), Y_{kt}(\chi_2)$ являются допустимым решением в задаче предприятия при $\chi = \chi_1$. Так как величины $\phi_k(\chi_1)$ являются оптимальными значениеми в задачах предприятий при $\chi = \chi_1$, то

$$\phi_k(\chi_1) \ge \sum_{t=1}^{T} (C_{kt}^1 X_{kt}(\chi_2) - C_{kt}^2 Y_{kt}(\chi_2)) = \phi_k(\chi_2).$$

Таким образом, $\phi_k(\chi_1) \ge \phi_k(\chi_2)$. □

Теорема 1. *Z является убывающей функцией по χ.*

Доказательство. Пусть $\chi_1 < \chi_2$.Тогда

$$Z(\chi_1) = \min_{k \in \mathcal{K}, t=\overline{1,T}} \left[\frac{p_{kt}^1 X_{kt} + p_{kt}^2 Y_{kt}}{\chi_1 M_{kt}} \right] = \frac{1}{\chi_1} \min_{k \in \mathcal{K}, t=\overline{1,T}} \left[\frac{p_{kt}^1 X_{kt} + p_{kt}^2 Y_{kt}}{M_{kt}} \right] >$$

$$> \frac{1}{\chi_2} \min_{k \in \mathcal{K}, t=\overline{1,T}} \left[\frac{p_{kt}^1 X_{kt} + p_{kt}^2 Y_{kt}}{M_{kt}} \right] = \min_{k \in \mathcal{K}, t=\overline{1,T}} \left[\frac{p_{kt}^1 X_{kt} + p_{kt}^2 Y_{kt}}{\chi_2 M_{kt}} \right] = Z(\chi_2).$$

Теорема доказана. □

Исследуем разрешимость задачи Центра (8)-(11).
Обозначим $\Phi(\chi) = \sum\limits_{k\in\mathcal{K}} \phi_k(\chi)$. Эта функция невозрастающая (как сумма невозрастающих функций).

Для любого $[\chi_1,\chi_2] \subset (0,1]$ и $\Phi(\chi_1) \neq 0, \Phi(\chi_2) \neq 0$ справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. *Если $0 < D \leq \chi_1\Phi(\chi_2)$, то решение задачи (8)-(11) существует на всем отрезке $[\chi_1,\chi_2]$.*
$\chi\Phi(\chi) \geq \chi\Phi(\chi_2) \geq \chi_1\Phi(\chi_2) \geq D$. Ограничение (8) выполнено. $\square$

Предложение 2. *Если $D \geq \chi_2\Phi(\chi_1)$ и $\chi_2\Phi(\chi_2) < D$, то решение задачи (8)-(11) не существует на всем отрезке $[\chi_1,\chi_2]$. Если $D \geq \chi_2\Phi(\chi_1)$ и $\chi_2\Phi(\chi_2) = D$, то решение задачи (8)-(11) есть $\chi = \chi_2$.*
При $\chi_1 \leq \chi < \chi_2$ выполняется $\chi\Phi(\chi) < \chi_2\Phi(\chi) \leq \chi_2\Phi(\chi_1) \leq D \Rightarrow \chi\Phi(\chi) < D$. Если при $\chi = \chi_2$ $\chi_2\Phi(\chi_2) < D$, то решения нет и при $\chi = \chi_2$. Если $\chi_2\Phi(\chi_2) = D$, то решение есть только при $\chi = \chi_2$. $\square$

Предложение 3. *Если $\chi_1\Phi(\chi_2) < D \leq \chi_2\Phi(\chi_2)$ и $D > \chi_1\Phi(\chi_1)$, то при $\frac{D}{\Phi(\chi_2)} \leq \chi \leq \chi_2$ решение задачи (8)-(11) существует, а при $\chi_1 \leq \chi < \frac{D}{\Phi(\chi_1)}$ решение задачи (8)-(11) не существует.*
Величина $\chi\Phi(\chi_2)$ при $\chi = \chi_1$ меньше D, а при $\chi = \chi_2$ больше, либо равно D. Поэтому на $[\chi_1,\chi_2]$ существует $\chi_0 = \frac{D}{\Phi(\chi_2)}$ такое что при $\chi_1 \leq \chi < \chi_0$ $\chi\Phi(\chi_2) < D$, а при $\chi_0 \leq \chi \leq \chi_2$ $\chi\Phi(\chi_2) \geq D$. Рассмотрим $\chi_0 \leq \chi \leq \chi_2$. На этом отрезке $\chi\Phi(\chi) \geq \chi\Phi(\chi_2) \geq D$, т.е. решение задачи (8)-(11) существует. Если $D > \chi_1\Phi(\chi_1)$, то $\chi_1 < \frac{D}{\Phi(\chi_1)} \leq \chi_2$. При $\chi_1 \leq \chi < \frac{D}{\Phi(\chi_1)}$
$\chi\Phi(\chi) < \frac{D}{\Phi(\chi_1)}\Phi(\chi) \leq \frac{D}{\Phi(\chi_1)}\Phi(\chi_1) = D$. Т.е. решения на этом промежутке не существует. $\square$

Предложение 4. *Если $\chi_2\Phi(\chi_2) < D < \chi_2\Phi(\chi_1)$ и $D > \chi_1\Phi(\chi_1)$, то при $\chi_1 \leq \chi < \frac{D}{\Phi(\chi_1)}$ решения задачи (8)-(11) не существует. Если, кроме того, $\chi_2\Phi\left(\frac{D}{\Phi(\chi_1)}\right) \leq D$, то решения задачи (8)-(11) не существует на всем отрезке $[\chi_1,\chi_2]$.*
Из условия $D > \chi_1\Phi(\chi_1)$ следует, что $\chi_1 < \frac{D}{\Phi(\chi_1)}$, так как $\Phi(\chi_1) > 0$. Из условия $D < \chi_2\Phi(\chi_1)$ следует, что $\chi_2 > \frac{D}{\Phi(\chi_1)}$. Поэтому точка $\frac{D}{\Phi(\chi_1)} \in [\chi_1,\chi_2]$. Аналогично предложению 3 доказывается, что $\chi\Phi(\chi) < D$ при $\chi_1 \leq \chi < \frac{D}{\Phi(\chi_1)}$.

Если, кроме того, выполнено $\chi_2\Phi(\frac{D}{\Phi(\chi_1)}) \leq D$, то

$$\chi\Phi(\chi) \leq \chi F\left(\frac{D}{\Phi(\chi_1)}\right) < \chi_2 D \leq D \quad \text{при} \quad \chi \in \left[\frac{D}{\Phi(\chi_1)},\chi_2\right).$$

При $\chi = \chi_2$ $\chi\Phi(\chi) < D$ по условию. Т.о. решения задачи (8)-(11) не существует на всем отрезке $[\chi_1,\chi_2]$. $\square$

Предложение 5. *Если $\chi_1\Phi(\chi_2) < D < \chi_2\Phi(\chi_1)$ и $D \leq \chi_1\Phi(\chi_1)$, то $\chi = \chi_1$ - решение задачи(8)-(11).*
При $\chi = \chi_1$ выполняется ограничение (8), т.к. по условию $D \leq \chi_1\Phi(\chi_1)$. Если исследуемый функционал не возрастает, то его максимум будет достигаться в крайне левой точке отрезка, т.е. в $\chi = \chi_1$. $\square$

Замечание 1. Если $\Phi(\chi_1) = 0$ и $\Phi(\chi_2) = 0$, то $\Phi(\chi) \equiv 0$ на $[\chi_1, \chi_2]$. Следовательно, решения на $[\chi_1, \chi_2]$ не существует. Если $\Phi(\chi_1) \neq 0, \Phi(\chi_2) = 0$, то в условия предложения 1 и предложения 3 попасть нельзя, т.к. в этом случае $0 < D \leq 0$. Случай $\Phi(\chi_1) = 0$ и $\Phi(\chi_2) \neq 0$ невозможен в силу того, что $\Phi(\chi)$ является невозрастающей функцией. Таким образом, единственно возможным случаем попадания в условия предложения 1 и предложения 3 является одновременное неравенство нулю величин $\Phi(\chi_1)$ и $\Phi(\chi_2)$.

Опираясь на результат теоремы 1, от задачи (8)-(11) можно перейти к эквивалентной задаче

$$\chi \to \min!$$

при тех же ограничениях

$$\chi\Phi(\chi) \geq D,$$

$$0 < \chi \leq 1,$$

а также условии, что $X_{kt}(\chi), Y_{kt}(\chi)$ находятся из решения задачи (3)-(7) при фиксированном χ. Таким образом реализуется предложенный во введении новый подход.

3.1 Эвристические алгоритмы нахождения оптимальной ставки пропорционального налога

Известно, что даже двухуровневой задача линейного программирования является NP - трудной (см. [6]). Поэтому предлагается эвристический алгоритм нахождения оптимальной ставки пропорционального налога.

Используя предложения 1-5, можно построить эвристический алгоритм А1 для решения задачи Центра.

Замечание 2. В дальнейшем будем употреблять выражение "вычисляем $\Phi(A)$". Это означает, что $\forall k \in \mathcal{K}$ решаются задачи (3)-(7) при $\chi = A$ и далее находится величина $\Phi(A) = \sum\limits_{k \in \mathcal{K}} \phi_k(A)$.

Замечание 3. Так как в ограничении (10) первое неравенство строгое, то мы можем заменить его на $\zeta \leq \chi < 1$,
где $\zeta > 0$ - малая величина. В действительности нулевая налоговая ставка невозможна, поэтому можно "заменить" 0 на малую величину ζ, к примеру $\zeta = 0.01\ \% = 10^{-4}$.

В зависимости от величины D возможны три ситуации:
1) $0 < D \leq \Phi(1)$,
2) $\Phi(1) < D < \Phi(\zeta)$,
3) $D \geq \Phi(\zeta)$.

В первом случае, когда $0 < D \leq \Phi(1)$, попадаем в условия предложения 3 при $\chi_1 = \zeta, \chi_2 = 1$.

Алгоритм А1 в этом случае выглядит следующим образом:

0-я итерация. Задаем ε, $z_1^{(0)} = \zeta, z_2^{(0)} = 1$. Вычисляем $\Phi(z_1^{(0)}), \Phi(z_2^{(0)})$.
Полагаем $k = 1$.

k-я итерация. Имеем $z_1^{(k-1)}\Phi(z_2^{(k-1)}) < D \leq z_2^{(k-1)}\Phi(z_2^{(k-1)})$ и $D > z_1^{(k-1)}\Phi(z_1^{(k-1)})$.
Полагаем $z_1^{(k)} = \frac{D}{\Phi(z_1^{(k-1)})}$, $z_2^{(k)} = \frac{D}{\Phi(z_2^{(k-1)})}$, $\Delta_k = z_2^{(k)} - z_1^{(k)}$.

если $\Delta_k < \varepsilon$, **то** $\chi^* := Z_2^{(k)}$,

иначе k:=k+1 и повторять.

Во втором случае, когда $\Phi(1) < D < \Phi(\zeta)$, попадаем в условия предложения 4 при $\chi_1 = \zeta, \chi_2 = 1$.

Алгоритм A1 в этом случае выглядит следующим образом:

0-я итерация. Задаем ε, $z_1^{(0)} = \zeta$, $z_2^{(0)} = 1$. Вычисляем $\Phi(z_1^{(0)}), \Phi(z_2^{(0)})$.
Полагаем $k = 1$.
k-я итерация. Имеем $z_2^{(k-1)}\Phi(z_2^{(k-1)}) < D < z_2^{(k-1)}\Phi(z_1^{(k-1)})$ и $D > z_1^{(k-1)}\Phi(z_1^{(k-1)})$.
Полагаем $z_1^{(k)} = \frac{D}{\Phi(z_1^{(k-1)})}, \chi^* = -1$, $z_2^{(k)} = z_2^{(k-1)}$.

если $z_2^{(k)}\Phi(z_2^{(k)}) \leq D$, **то** $\chi^* = -1$ и *конец*.

если $z_1^{(k)}\Phi(z_1^{(k)}) \geq D$, **то** $\chi^* = z_1^{(k)}$,

иначе если $\Delta_k < \varepsilon$, **то** $\chi^* = -1$ и *конец*.

иначе k:=k+1 и повторять.

конец если

конец если

конец.

Если решения задачи (8)-(11) не существует, то на выходе получаем $\chi^* = -1$, в противоположном случае получаем реальное значение χ^*.

В третьем случае, когда $D \geq \Phi(\zeta)$, попадаем в условия предложения 2 и получаем, что решения не существует.

3.2 Поиск области достижимости объема налоговых сборов

Как видно из схемы алгоритма A1, при $\Phi(1) < D < \Phi(\zeta)$ допустимые решения могут существовать, а могут и не существовать. Если допустимых решений не существует, то предложим простой **алгоритм A2** для нахождения интервала, гарантирующего существование допустимого решения при попадании D в этот интервал. Этот алгоритм основан на методе дихотомии и предложении 4.

Алгоритм A2

Задаем точность δ, $L := \Phi(1), R := \Phi(\zeta)$.

если $\Phi(\frac{D}{R}) \leq D$, **то** $R := D$,

иначе применяем алгоритм A1

если существует допустимое решение, **то** $L := D$

иначе $R := D$

конец если

конец если

$$D := \frac{L+R}{2}$$

если $R - L < \delta$, **то** *Конец*

иначе повторять

конец.

В результате этого алгоритма получаем интервал $(L, R) \subset (\Phi(1), \Phi(\zeta))$ такой, что для $D \in (L, R)$ допустимое решение всегда существует.

Очевидно, что существование оптимального решения задачи (8)-(11) зависит от выбора D. Желание Центра собрать как можно больше налогов, т.е. задание слишком большого D, ведет к отсутствию допустимых решений. Кроме того, даже если допустимые решения в (8)-(11) существуют, большему D соответствует меньшее оптимальное значение функционала управления (2). Поэтому при выборе величины средств D следует учитывать эти условия.

4 Исследование модели с прогрессивной шкалой налогообложения

Далее изучим случай, когда налоговая ставка является кусочно-постоянной возрастающей функцией от прибыли.

Аналитическая формула ставки прогрессивного налога имеет вид:

$$\chi(x) = \chi_i, r_{i-1} \le x < r_i, i = \overline{1,p}.$$

Здесь $r_0 = \zeta$ (см. Замечание 3 в предыдущем разделе), $r_p = +\infty$. Считаем, что все $r_i, i = \overline{1, p-1}$ заданы.

Тогда $\Psi(x)$ является выпуклой вниз, кусочно-линейной функцией с участками линейности $[r_{i-1}, r_i)\,, i = \overline{1,p}$.

Аналитическая формула $\Psi(x)$имеет вид:

$$\Psi(x) = \max\{\psi_i(x), i = \overline{1,p}\},$$

где

$$\psi_1(x) = \chi_1 x + R_1, \zeta \le x < r_1,$$

$$\psi_2(x) = \chi_2 x + R_2, r_1 \le x < r_2,$$

$$\psi_i(x) = \chi_i x + R_i(r_1, \dots, r_{i-1}, \chi_1, \dots, \chi_i), r_{i-1} \le x < r_i,$$

при этом для $i = \overline{2,p}$

$$R_i(r_1, \dots, r_{i-1}, \chi_1, \dots, \chi_i) = \sum_{j=2}^{i-1} \chi_j (r_j - r_{j-1}) + r_1 \chi_1 - r_{i-1} \chi_i.$$

Для R_i справедливы рекуррентные соотношения:

$$R_1 = 0,$$

$$R_{i+1} = R_i - r_i(\chi_{i+1} - \chi_i), i = \overline{1, p-1}.$$

Вначале рассмотрим случай, когда $p = 2$. В этом случае

$$\Psi(M_{kt}) = \max\{\chi_1 M_{kt} + R_1, \chi_2 M_{kt} + R_2\}.$$

Таким образом, возникает следующая задача.
Определить ставки χ_1, χ_2 и величины d_{kt} такие, что, если векторы X_{kt}, Y_{kt} являются решением задач математического программирования

$$(3), (4), (5),$$

$$C_{kt}^2 Y_{kt} \le b_{k0} + \sum_{\tau=1}^{t-1} M_{k\tau} - \sum_{\tau=1}^{t-1} \Psi(M_{k\tau}), \quad t = \overline{1,T}, \tag{12}$$

$$(7),$$

и выполняются условия (9),

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} \Psi(M_{kt}) \ge D, \tag{13}$$

$$\zeta < \chi_1 < \chi_2 \le 1, \tag{14}$$

то

$$Z = \min_{k\in\mathcal{K}, t=\overline{1,T}} \left[\frac{p_{kt}^1 X_{kt} + p_{kt}^2 Y_{kt}}{\Psi(M_{kt})} \right] \to \max! \tag{15}$$

Отметим, что ограничение (13) возникает из-за подхода, объявленного во введении.

Замечание 4. Будем обозначать задачу предприятия при $p = 2$, $\chi_1 = \alpha$, $\chi_2 = \beta$ через $\Pi(\alpha, \beta)$.

Лемма 2. *$\phi_k(\chi_1, \chi_2)$ есть невозрастающая функция одного из параметров при фиксировании другого.*

Пусть $\alpha < \beta$. Покажем, что $\phi_k(\alpha, \chi_2) \ge \phi_k(\beta, \chi_2)$. Заметим, что векторы $X_{kt}(\beta, \chi_2), Y_{kt}(\beta, \chi_2), \Psi(M_{kt}(\beta, \chi_2)), \quad t = \overline{1,T}$ являются допустимыми решениями в задаче $\Pi(\alpha, \chi_2)$ в случае, если $M_{kt} \ge 0$. В начале предыдущей главы мы предположили, что $M_{kt} > 0$. Так как $\phi_k(\alpha, \chi_2)$ является оптимальным решением в задаче $\Pi(\alpha, \chi_2)$, то $\phi_k(\alpha, \chi_2) \ge \phi_k(\beta, \chi_2)$.
Неравенство $\phi_k(\chi_1, \alpha) \ge \phi_k(\chi_1, \beta)$ доказывается аналогично. □

Теорема 2. *Если $\alpha < \beta$, то $Z(\alpha, \chi_2) > Z(\beta, \chi_2)$, за исключением одного случая, когда $Z(\alpha, \chi_2) = Z(\beta, \chi_2)$.*

Доказательство. При $p = 2$ функционал (15) имеет вид

$$Z = \min_{k\in\mathcal{K}, t=\overline{1,T}} \left[\frac{p_{kt}^1 X_{kt} + p_{kt}^2 Y_{kt}}{\max\{\chi_1 M_{kt} + R_1, \chi_2 M_{kt} + R_2\}} \right].$$

Пусть для $Z(\alpha, \chi_2)$ минимум достигается при $k = k_0$, $t = t_0$, для $Z(\beta, \chi_2)$ при $k = k_1$, $t = t_1$.

Возможны 4 варианта выражений для функционала Z.

Случай 1.

$$Z = \frac{p_{k_0 t_0}^1 X_{k_0 t_0} + p_{k_0 t_0}^2 Y_{k_0 t_0}}{\alpha M_{k_0 t_0} + R_1}.$$

Тогда

$$Z(\beta,\chi_2)=\frac{p^1_{k_1t_1}X_{k_1t_1}+p^2_{k_1t_1}Y_{k_1t_1}}{\max\{\beta M_{k_1t_1}+R_1,\chi_2M_{k_1t_1}+R_2\}}\le\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\max\{\beta M_{k_0t_0}+R_1,\chi_2M_{k_0t_0}+R_2\}}=$$

случай 1a.

$$=\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\beta M_{k_0t_0}+R_1}<\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\alpha M_{k_0t_0}+R_1}=Z(\alpha,\chi_2).$$

Таким образом в этом случае $Z(\beta,\chi_2)<Z(\alpha,\chi_2)$.

случай 1b.

$$=\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\chi_2M_{k_0t_0}+R_2},$$

но такого быть не может, т.к. если $\beta M_{k_0t_0}+R_1<\chi_2M_{k_0t_0}+R_2<\alpha M_{k_0t_0}+R_1$, то $\beta<\alpha$, что противоречие условию теоремы.

Случай 2.

$$Z=\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\chi_2M_{k_0t_0}+R_2}.$$

Тогда

$$Z(\beta,\chi_2)\le\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\max\{\beta M_{k_0t_0}+R_1,\chi_2M_{k_0t_0}+R_2\}}=$$

случай 2a.

$$=\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\chi_2M_{k_0t_0}+R_2}=Z(\alpha,\chi_2).$$

Следовательно $Z(\beta,\chi_2)\le Z(\alpha,\chi_2)$, причем равенство возможно только тогда, когда минимум $Z(\beta,\chi_2)$ не единствененый, т.е. тогда, когда

$$\frac{p^1_{k_1t_1}X_{k_1t_1}+p^2_{k_1t_1}Y_{k_1t_1}}{\max\{\beta M_{k_1t_1}+R_1,\chi_2M_{k_1t_1}+R_2\}}=\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\max\{\beta M_{k_0t_0}+R_1,\chi_2M_{k_0t_0}+R_2\}}.$$

Этот особый случай *) мы будем рассматривать его отдельно.

случай 2b.

$$\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\beta M_{k_0t_0}+R_1}<\frac{p^1_{k_0t_0}X_{k_0t_0}+p^2_{k_0t_0}Y_{k_0t_0}}{\chi_2M_{k_0t_0}+R_2}=Z(\alpha,\chi_2).$$

Последнее неравенство верно, так как $\beta>\alpha\Rightarrow\quad\beta M_{k_0t_0}+R_1>\chi_2M_{k_0t_0}+R_2>\alpha M_{k_0t_0}+R_1$ (для случая 2b).

Таким образом, из возможных случаев 1a, 2a, 2b следует $Z(\beta,\chi_2)<Z(\alpha,\chi_2)$, за исключением особого случая *), который исследуем при формулировке Замечания 5. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим подробнее ограничение в задаче Центра на произвольном отрезке $[\zeta,b]\subseteq[\zeta,\chi_2]$. Фиксируем χ_2. Обозначим

$$G(\chi_1,\chi_2)=\sum_{k\in\mathcal{K}}\phi_k(\chi_1,\chi_2).$$

Ясно, что

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \chi_1\phi_k(\chi_1,\chi_2) \le G(\chi_1,\chi_2) \le \sum_{k\in\mathcal{K}} \chi_2\phi_k(\chi_1,\chi_2).$$

Как и ранее обозначим

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \phi_k(\chi_1,\chi_2) = \overline{\Phi}(\chi_1,\chi_2).$$

Таким образом

$$\chi_1\overline{\Phi}(\chi_1,\chi_2) \le G(\chi_1,\chi_2) \le \chi_2\overline{\Phi}(\chi_1,\chi_2).$$

По лемме 2 $\overline{\Phi}(\chi_1,\chi_2)$ является невозрастающей функцией χ_1, тогда

$$\overline{\Phi}(\chi_1,\chi_2) \ge \overline{\Phi}(b,\chi_2) \quad \text{при} \quad \chi_1 \le b.$$

Отсюда

$$\chi_1\overline{\Phi}(\chi_1,\chi_2) \ge \chi_1\overline{\Phi}(b,\chi_2).$$

Тогда для функции $G(\chi_1)$имеем оценку на интервале $[\zeta,b]$:

$$\chi_1\overline{\Phi}(b,\chi_2) \le G(\chi_1,\chi_2) \le \chi_2\overline{\Phi}(\chi_1,\chi_2) \quad (*).$$

Эта оценка понадобится нам для построения алгоритма решения задачи с двумя ставками налога.

4.1 Эвристический алгоритм для решения задачи с двумя ставками налогообложения

Различаются три случая:
1)$D > \chi_2\overline{\Phi}(\zeta,\chi_2)$,
2)$0 < D \le \chi_2\overline{\Phi}(\chi_2,\chi_2)$,
3)$\chi_2\overline{\Phi}(\chi_2,\chi_2) < D \le \chi_2\overline{\Phi}(0,\chi_2)$.

В первом случае допустимых решений в задаче Центра не существует, в третьем случае допустимые решения могут существовать, а могут и не существовать. Интересен второй случай, когда допустимое решение существует всегда. Кроме того, в предложенном ниже алгоритме А3 D попадает как раз во второй промежуток.

Построим алгоритм Q, который будет выдавать оптимальное значение ставки налога χ_1^{opt} для случая p=2 с точкой разбиения r отрезка $[0,\infty)$ при фиксированном χ_2:

$$Q(\chi_2,r,[\zeta,\infty)) = \chi_1^{opt}.$$

Алгоритм будет основан на теореме 2 и на следующем утверждении.

Предложение 6. *Для произвольного $[\zeta,b] \subseteq [\zeta,\chi_2]$ при $0 < D \le b\overline{\Phi}(b,\chi_2)$ существует $a = \frac{D}{\overline{\Phi}(b,\chi_2)}$ такое, что все χ_1, $a \le \chi_1 \le b$ принадлежат допустимым решениям задачи (13) - (15).*

Величина $\chi_1\overline{\Phi}(b,\chi_2)$ при $\chi_1 = \zeta$ меньше D, а при $\chi_1 = b$ больше, либо равно D. Тогда существует точка такая, что $\overline{\Phi}(b,\chi_2) = D$. Рассмотрим $[a,b]$. Для $\chi_1 \in [a,b]$ в силу $(*)$ справедливы неравенства:

$$G(\chi_1,\chi_2) \geq \chi_1\overline{\Phi}(b,\chi_2) \geq a\overline{\Phi}(b,\chi_2) = D,$$

т.е. $\chi_1 \in [a,b]$ – допустимые решения задачи (13) - (15). $\square$

Обоснование построения алгоритма Q.

На k-й итерации имеем $[\zeta, a_{k-1}] \subseteq [\zeta, \chi_2]$ и $0 < D \leq a_{k-1}\overline{\Phi}(a_{k-1},\chi_2)$. По предложению 6 существует точка $a_k = \frac{D}{\overline{\Phi}(a_{k-1},\chi_2)}$ такая, что $\chi_1 \in [a_k, a_{k-1}]$ - допустимые решения задачи (13) - (15). В качестве промежуточного решения выбираем a_k. Далее рассматриваем отрезок $[\zeta, a_k]$. На этом отрезке в силу невозрастания $\overline{\Phi}(\chi_1,\chi_2)$ по первой переменной имеем

$$a_k\overline{\Phi}(a_k,\chi_2) \geq a_k\overline{\Phi}(a_{k-1},\chi_2) = D,$$

т.е. $a_k\overline{\Phi}(a_k,\chi_2) \geq D \quad (**)$, и опять попадаем в условия предложения 6.
Критерием остановки будет $a_k - a < \varepsilon$, где $a = \frac{D}{\overline{\Phi}(\zeta,\chi_2)}$, т.к. $a_k \to a (k \to \infty)$.

Алгоритм Q

0-я итерация. Задаем точность ε, $a_0 := \chi_2$, $a = \frac{D}{\overline{\Phi}(\zeta,\chi_2)}$.

Вычисляем $\overline{\Phi}(a_0,\chi_2)$.

k-я итерация. $a_k := \frac{D}{\overline{\Phi}(a_{k-1},\chi_2)}$.

Если $a_k - a < \gamma$, **то** $\chi_1^{opt} = a_k$

иначе k:=k+1 и повторять.

Заметим, что $\chi_1^{opt}\overline{\Phi}(\chi_1^{opt},\chi_2) \geq D \quad (***)$. Это следует из $(**)$. $(***)$ важно при доказательстве существования решения задачи (13) - (15).

Замечание 5. Вернемся к особому случаю *), при реализации которого минимум в функционале Z не единственный.

Грубо говоря, алгоритм Q можно изложить так:

По возможности уменьшаем значение χ_1, тем самым увеличивая значение функционала Центра. В случае, когда минимум не единственный, мы его не увеличиваем. При этоме (если $Z(\alpha,\chi_2) = Z(\beta,\chi_2)$, в качестве χ_1 выбирается меньшее из возможных значений (т.е. α), и итерации продолжаются.

Если же $\forall \alpha, \beta \quad Z(\alpha,\chi_2) = Z(\beta,\chi_2)$, то функционал Z является константой, и нет смысла его оптимизировать.

4.2 Эвристический алгоритм для решения задачи с заданным числом ставок налога

Теперь построим эвристический **алгоритм А3** для решения задачи (13) - (15), в случае когда значение p произвольное.

Шаг 1. Полагаем $\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_p$ и решаем задачу (13) - (15), используя алгоритм А1 для пропорционального налога. Находим χ_p^*.

Шаг 2. Полагаем $\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_{p-1}$ и $\chi_p = \chi_p^*$. Применяем алгоритм Q:

$$Q(\chi_p^*, r_{p-1}, [\zeta, r_p]) = \chi_{p-1}^*$$

Находим χ_{p-1}^*.

Шаг i. Полагаем $\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_{p-i+1}$, $\chi_{p-i+2} = \chi_{p-i+2}^*, \ldots, \chi_p = \chi_p^*$.

Для произвольного i от 3 до $p-1$ применяем алгоритм Q, где в качестве χ_2 берется χ_{p-i+2}^*, а

$$\overline{\Phi}(\chi_{p-i+1}, \chi_{p-i+2}^*) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \phi_k(\chi_{p-i+1}, \chi_{p-i+2}^*, \ldots, \chi_p^*),$$

$$Q(\chi_{p-i+2}^*, r_{p-i+1}, [0, r_{p-i+2}]) = \chi_{p-i+1}^*$$

Находим χ_{p-i+1}^*.

Шаг p.

Если $G(\zeta, \chi_2^*) \geq D$, **то** $\chi_1^* = \zeta$,

иначе если $G(\frac{D}{\overline{\Phi}(0,\chi_2^*)}, \chi_2^*) \geq D$, **то** $\chi_1^* = \frac{D}{\overline{\Phi}(\zeta,\chi_2^*)}$

иначе применяем алгоритм Q:

$$Q(\chi_2^*, r_1, [0, r_2]) = \chi_1^*$$

конец если

конец если.

Здесь

$$G(\chi_1, \chi_2^*) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} M_{kt}(\chi_1, \chi_2^*, \ldots, \chi_p^*), \quad \overline{\Phi}(\chi_1, \chi_2^*) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \phi_k(\chi_1, \chi_2^*, \ldots, \chi_p^*).$$

В результате работы алгоритма получаем набор $(\chi_1^*, \ldots, \chi_p^*)$. Заметим, что вектор с компонентами $\chi_1^*, \ldots, \chi_p^*$ всегда существует, если существует оптимальное значение пропорционального налога χ_p^* в алгоритме A1. Действительно, на шаге 1 алгоритма A3 получаем χ_p^* такое, что $\chi_p^* \Phi(\chi_p^*) \geq D$, т.к. χ_p^*– оптимальное, а, следовательно, и допустимое решение в задаче (13) - (15).

Далее на шаге 2 алгоритма A3 в алгоритме Q $\chi_2 = \chi_p^*$ и $D \in (0, \chi_p^* \overline{\Phi}\left(\chi_p^*, \chi_p^*,\right)]$, т.к. $\overline{\Phi}(\chi_p^*, \chi_p^*) = \Phi(\chi_p^*)$. Поэтому χ_{p-1}^* существует, т.к. при D из этого промежутка допустимое решение существует всегда. Для i от 2 до $p-1$ χ_{p-i}^* также существуют, т.к. на каждом шаге i D принадлежит промежутку аналогичного типа. Действительно, в результате работы алгоритма Q $\chi_{p-i+1}^* \overline{\Phi}(\chi_{p-i+1}^*, \chi_{p-i+2}^*,) \geq D$ на любом шаге, что было замечено ранее в $(***)$.

D силу невозрастания $\overline{\Phi}(\chi_1, \chi_2)$ по второй переменной справедливо неравенство $\chi_{p-i+1}^* \overline{\Phi}(\chi_{p-i+1}^*, \chi_{p-i+1}^*,) \geq \chi_{p-i+1}^* \overline{\Phi}(\chi_{p-i+1}^*, \chi_{p-i+2}^*,) \geq D$, т.е. $D \in (0, \chi_{p-i+1}^* \overline{\Phi}\left(\chi_{p-i+1}^*, \chi_{p-i+1}^*\right)]$.

Замечание 6. Если бы в алгоритм Q было включено условие "$G(\zeta, \chi_2) \geq D \Rightarrow \chi_1^{opt} = \zeta$", то при выполнении этого условия на каком-либо шаге i

от $p-1$ до 2 в алгоритме А3, т.е. $G(\zeta, \chi^*_{p-i+2}) \geq D$, мы получили бы, что $\chi^*_{p-i+1} = \zeta$. Следовательно, на всех последующих шагах в алгоритме А3 $\chi^*_{p-i} = \ldots = \chi^*_1 = \zeta$. Но такое решение не является допустимым в задаче (13) - (15), т.к. в ограничении (14) должны выполняться строгие неравенства. Таким образом, выполнение условия "$G(\zeta, \chi_2) \geq D \Rightarrow \chi_1^{opt} = \zeta$" приводит к отсутствию решения задачи Центра. На последнем шаге p алгоритма А3 выполнение условия "$G(\zeta, \chi_2) \geq D \Rightarrow \chi_1^{opt} = \zeta$", наоборот, дает наилучший результат.

Если бы в алгоритм Q было включено условие "$G(\frac{D}{\overline{\Phi}(\zeta,\chi_2)}, \chi_2) \geq D \Rightarrow \chi_1^{opt} = \frac{D}{\overline{\Phi}(\zeta,\chi_2)}$", то также нельзя было бы гарантировать существование решения задачи (13) - (15), т.к. при выполнении этого условия на каком-либо шаге i от 2 до $p-1$ в алгоритме А3 на шаге $i+1$ уже нельзя утверждать, что D будет принадлежать отрезку типа $D \in \left(0, \chi^*_{p-i}\overline{\Phi}(\chi^*_{p-i}, \chi^*_{p-i})\right]$, т.е. допустимого решения задачи Центра может и не существовать.

Выполнение же условия

$$G(\frac{D}{\overline{\Phi}(\zeta, \chi_2)}, \chi_2) \geq D \Rightarrow \chi_1^{opt} = \frac{D}{\overline{\Phi}(\zeta, \chi_2)}$$

на последнем шаге алгоритма А3 улучшает значение, полученное из алгоритма Q.

Покажем, что на последующих шагах алгоритма А3 значение функционала Z увеличивается. Для функционала $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_i)$, зависящего от i переменных, введем индекс i, обозначающий количество этих переменных, т.е.

$$\Phi^i(\chi_1, \ldots, \chi_i) = \Phi(\chi_1, \ldots, \chi_i).$$

Тогда на первом шаге алгоритма А3 имеем $\Phi^1(\chi^*_p)$. На втором шаге в силу возрастания по первой переменной имеем

$$\Phi^1(\chi^*_p) = \Phi^2(\chi^*_p, \chi^*_p) < \Phi^2(\chi^*_{p-1}, \chi^*_p).$$

Для i от 2 до $p-1$ имеем по той же причине

$$\begin{aligned}\Phi^i(\chi^*_{p-i+1}, \chi^*_{p-i+2}\cdots, \chi^*_p) &= \Phi^{i+1}(\chi^*_{p-i+1}, \chi^*_{p-i+1}, \chi^*_{p-i+2}\cdots, \chi^*_p) < \\ &< \Phi^{i+1}(\chi^*_{p-i}, \chi^*_{p-i+1}, \chi^*_{p-i+2}\cdots, \chi^*_p).\end{aligned}$$

Это показывает, что значение функционала Z при увеличении числа переменных увеличивается.

Рассуждения, проведенные выше, подтверждают справедливость следующего утверждения, аналогичного по смыслу с приведенными в [7].

Предложение 7. Введение прогрессивного налога на прибыль позволяет уменьшить ставки налога для отдельных групп налогоплательщиков.

5 Заключение

В настоящей работе рассмотрена экономическая система из нескольких предприятий и органа Управления и исследована возможность регулирования этой системы с помощью различных видов налога.

Получены легко проверяемые достаточные условия нахождения интервала допустимого объема налоговых сборов.

Показано, что в случае, когда в задаче сохранения пропорций производства вместо пропорционального налога используется прогрессивный налог, качество функционирования экономической системы улучшается. Предложены эвристические алгоритмы нахождения рациональных значений ставок налога при плоской шкале налогообложения и при прогрессивном налоге с фиксированным числом ставок.

Предложенные алгоритмы при наличии реальной информации позволяют разработать рациональную схему налогообложения.

О трудоемкости полученных алгоритмов:
Эвристический алгоритм поиска оптимального решения задачи с пропорциональным налогом, для достижения точности ε требует m итераций, где

$$m \leq \frac{\ln \varepsilon}{\ln(\frac{D}{\Phi(1)} - \frac{D}{\Phi(\zeta)})} + 1.$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН N I.5.1., проект N 0314-2016-0018. В заключение авторы благодарят за финансовую поддержку Российский гуманитарный научный фонд (проект 16-02-00049) и Российский фонд фундаментальных исследований (проекты 16-06-00046, 16-06-00101 и 16-01-00108).

Список литературы

1. Анцыз, С.М., Рыпалова, О.А.: О двух системах налогообложения дискретные модели. Препринт N 252, Новосибирск: ИМ СО РАН (2010)
2. Анцыз, С.М., Донсков, И.В., Маршак, В.Д, Чупин, В.Г.: Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние (1990)
3. Анцыз, С.М., Лавлинский, С. М., Певницкий, А. И., Проценко, А. В.: О методах экономической оценки месторождения полиметаллических руд. Препринт N 77, Новосибирск: ИМ СО РАН (2000)
4. Анцыз, С. М., Крахалёв, А. А.: О динамики цен на рынке недвижимости. Труды 12-й Международной Азиатской школы-семинара "Проблемы оптимизации сложных систем", Новосибирск, 12-16 декабря 2016 г. С. 50-57 (2016)
5. Анцыз, С.М., Высоцкая, Т.В.: Двухуровневые модели оптимизации экологического налогообложения. Препринт N 166, Новосибирск: ИМ СО РАН (2006)
6. Ben-Ayed, O., Blayer, C.: Computational difficulties of bilevel linear programming. Operation Research 38, 556–560 (1990)
7. Edgeworth, F.Y.: The Pure Theory of Taxation. The Economic Journal 7(25), 46–70 (1897)