On dynamical reconstruction of an input in a nonlinear system

Marina S. Blizorukova
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Federal University
Yekaterinburg, Russia
mblizorukova@gmal.com

Abstract

The problem of reconstructing an unknown input of a parabolic equation is considered. Solving algorithm based on the constructions of feedback control theory and theory of ill-posed problems is stable with respect to informational noises and computational errors.

Keywords: reconstruction, feedback control.

1 Введение. Постановка задачи.

Рассматривается параболическое уравнение в гильбертовом пространстве $(X, |\cdot|_X)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где A – инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $\mathcal{X}(t) : \ X \to X$ $(t \in T)$, $f(\cdot) \in L_2(T; X)$ – заданное возмущение, B – линейный непрерывный оператор $(B \in \mathcal{L}(U; X))$, U – гильбертово пространство с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_U$, $\vartheta = \text{const} \in (0, +\infty)$.

Слабым решением уравнения (1), отвечающим управлению $u(\cdot) \in L_\infty(T; U)$ и начальному состоянию $x(0) = x_0$, называется непрерывная функция $x(t) : \ T \to X$, определяемая равенством

$$x(t) = \mathcal{X}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{X}(t - \tau)\{Bu(\tau) + f(\tau)\}\, d\tau.$$

Как известно, для любых $x_0 \in X$, $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ существует единственное слабое решение $x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot)) \in C(T; X)$ уравнения (1).

Рассматривается следующая задача. Имеется уравнение (1), на которое действует неизвестное входное воздействие $u(\cdot) \in P(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; U) : v(t) \in P$ при п.в. $t \in T\}$, $P \subset U$ — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. Решение уравнения (1) также неизвестно. В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = \tau_{i-1} + \delta$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$, $\delta = \vartheta/m$, измеряются с ошибкой h фазовые состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; 0, x_0, u(\cdot))$, т.е. становятся известными элементы $\xi_i^h \in X$, которые удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_X \le \nu_i^h, \tag{2}$$

In: M.Yu. Filimonov, S.V. Kruglikov M.S. Blizorukova (eds.): Proceedings of the International Workshop on Information Technologies and Mathematical Modeling for Efficient Development of Arctic Zone (IT&MathAZ2018), Yekaterinburg, Russia, 19-21-April-2018, published at http://ceur-ws.org

где $\nu_i^h \in (0,1)$ — величина ошибки измерения в момент τ_i, число $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения. Необходимо указать алгоритм динамического восстановления неизвестного входного воздействия $u(\cdot)$.

Будем предполагать, что на помехи, реализуемые в канале наблюдения, накладываются ограничения «малости» их средних значений за весь промежуток времени функционирования системы.

Опишем кратко схему решения рассматриваемой задачи, следуя подходу, который развит в [1–4]. В соответствии с этим подходом задача приближенного вычисления неизвестного входного воздействия $u_*(\cdot)$ (задача реконструкции) заменяется новой задачей, а именно задачей управления по принципу обратной связи вспомогательной системой M, называемой моделью. В дальнейшем фазовую траекторию модели мы обозначаем символом $w^h(\cdot)$, а управление в модели – символом $v^h(\cdot)$. Процесс управления моделью организуется таким образом, чтобы при подходящем согласовании ряда параметров функция $v^h(\cdot)$ являлась приближением $u(\cdot)$.

Итак, решение задачи реконструкции по существу равносильно решению следующих двух задач:

а) задачи подходящего выбора вспомогательной системы (модели M) и

б) задачи выбора закона формирования управления $v^h(\cdot)$ этой моделью.

Пусть выбрано семейство $\{\Delta_h\}$, $h \in (0,1)$, разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) = \frac{\vartheta}{m_h} \tag{3}$$

промежутка T. В качестве модели возьмем «копию» уравнения (1), т.е. параболическое уравнение вида

$$\dot{w}^h(t) = Aw^h(t) + Bv^h(t) + f(t), \quad w^h(0) = \xi_0^h, \quad t \in T. \tag{4}$$

Под решением уравнения (4), порожденным управлением $v^h(\cdot) \in L_\infty(T;U)$, будем понимать функцию $w^h(\cdot) = w(\cdot;0,w^h(0),v^h(\cdot)) \in C(T;X)$ – слабое решение уравнения (4), т.е.

$$w^h(t) = \mathcal{X}(t)w^h(0) + \int\limits_0^t \mathcal{X}(t-\tau)\{Bv^h(\tau) + f(\tau)\}\,d\tau.$$

Символом $\Xi(x(\cdot),h)$ обозначим множество всех функций $\xi^h(t) = \xi_i^h \in X$, $t \in \delta_i = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, таких, что элементы ξ_i^h удовлетворяют неравенствам (2) (при $\tau_i = \tau_{h,i}$).

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. В пространстве X введена эквивалентная норме $|\cdot|_X$ норма $|\cdot|_2$:

$$c_1|\cdot|_2 \le |\cdot|_X \le c_2|\cdot|_2, \quad c_1, c_2 = \mathrm{const} \in (0,+\infty),\ c_1 < c_2,$$

в которой полугруппа $\mathcal{X}(t)$ ω-диссипативна: $|\mathcal{X}(t)x|_2 \le \exp(\omega t)|x|_2$ для любых $x \in X$. Норма $|\cdot|_2$ порождена некоторым скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_2$.

В дальнейшем, как это часто принято, мы отождествляем пространство X с сопряженным к нему пространством X^*. Ниже символ $(\cdot,\cdot)_2$ означает скалярное произведение в X, соответствующее норме $|\cdot|_2$.

Введем два критерия отклонения $v^h(\cdot)$ от $u(\cdot)$ на ограниченном отрезке времени T:

$$\omega_1(v^h(\cdot),u(\cdot)) = \max_{0\le\tau_i\le\vartheta} \exp(-2\omega\tau_i)\left|w^h(\tau_i;0,\xi_0^h,v^h(\cdot)) - x(\tau_i;0,x_0,u(\cdot))\right|_X^2, \tag{5}$$

$$\omega_2(v^h(\cdot),u(\cdot)) = \int\limits_0^\vartheta |v^h(t)|_U^2\,dt - \int\limits_0^\vartheta |u(t)|_U^2\,dt, \quad \tau_i = \tau_{h,i}. \tag{6}$$

Здесь $x(\cdot;0,x_0,u(\cdot))$ и $w^h(\cdot;0,\xi_0^h,v^h(\cdot))$ — решения уравнений (1) и (4), порождаемые $u(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ соответственно.

Коротко остановимся на причинах, побудивших нас взять в качестве критериев отклонения $v^h(\cdot)$ от $u(\cdot)$ на отрезке T функции $\omega_1(\cdot)$ и $\omega_2(\cdot)$ видов (5) и (6) соответственно. Пусть $U(x(\cdot))$ – множество всех управлений, совместимых с выходом $x(\cdot)$. Иными словами,

$$U(x(\cdot)) = \left\{u(\cdot) \in P(\cdot):\ x(t) = \mathcal{X}(t)x_0 + \int\limits_0^t \mathcal{X}(t-\tau)\{Bu(\tau) + f(\tau)\}\,d\tau \quad \forall t \in T\right\},$$

где $P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T;U) : u(t) \in P$ при п.в. $t \in T\}$. Легко видеть, что это множество выпукло и замкнуто в $L_2(T;U)$. Поэтому оно содержит единственный элемент $u(\cdot) = u(\cdot; x(\cdot))$ минимальной $L_2(T;U)$-нормы. Пусть взяты последовательности чисел $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$, $h_j \to +0$ при $j \to +\infty$, и функций $\{v^{h_j}(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \in P(\cdot)$, $v^{h_j}(\cdot)$ сходится слабо в $L_2(T;U)$ при $j \to +\infty$ к некоторой функции. Тогда, как следует из результатов [4], соотношения $\omega_1(v^{h_j}(\cdot), u(\cdot)) \le \gamma_1(h_j)$, $\omega_2(v^{h_j}(\cdot), u(\cdot)) \le \gamma_2(h_j)$, $(\gamma_2(h) \ge 0)$, влекут сильную сходимость $v^{h_j}(\cdot)$ к $u(\cdot; x(\cdot))$ в $L_2(T;U)$ при $j \to +\infty$, если $\gamma_1(h_j) \to 0$, $\gamma_2(h_j) \to 0$ при $j \to \infty$.

Задачи восстановления в темпе реального времени тех или иных характеристик играют важную роль в теории управления при дефиците информации. Аналогичная описанной выше задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, была рассмотрена в работах [9,10], а для параболического уравнения была рассмотрена в работах [11–13]. При этом в указанных выше работах полагалось равномерное отклонение ξ_i^h от $x(\tau_i)$, т.е. вместо (2) выполнялось условие $|\xi_i^h - x(\tau_i)|_X \le h$, где h — мало.

2 Алгоритм решения.

Введем следующее условие

Условие 2. Семейства разбиений (3) и величины ошибок измерений ν_i^h таковы, что имеют место соотношения

$$\nu_0^h \le c_* h, \quad \delta(h) \sum_{i=0}^{m_h} \nu_i^h \le \varphi_1(h) \to 0+ \quad \text{при } h \to 0+.$$

До начала работы алгоритма фиксируются величина $h \in (0,1)$, разбиение Δ_h (см (3)) и число $\alpha = \alpha(h)$, где $\alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$ — некоторая фиксированная функция. Работа алгоритма разбивается на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции. Сначала в момент $t = \tau_i$ измеряется фазовое состояние $x(\tau_i)$, т.е. находится элемент $\xi_i^h \in X$ со свойством (2). Затем вычисляется измеримая (по Лебегу) функция $v^h(\cdot)$:

$$2\exp(-2\omega\tau_{i+1})(B^*(\mathcal{X}^*(\tau_{i+1} - \tau)\tilde{s}_i, v^h(\tau))_U + \alpha|v^h(\tau)|_U^2 \le \tag{7}$$

$$\le \min\{2\exp(-2\omega\tau_{i+1})(\mathcal{X}^*(\tau_{i+1} - \tau)\tilde{s}_i, u)_U + \alpha|u|_U^2 : \ u \in P\} + d\nu_i^h,$$

при п.в. $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Здесь $d = \text{const} > 0$, B^* — сопряженный оператор,

$$\tilde{s}_i = \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i)s_i, \quad s_i = w^h(\tau_i) - \xi_i^h.$$

После этого управление $v^h(t)$ подается на вход модели (4) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Под действие этого управления фазовая траектория модели переходит из состояния $w^h(\tau_i)$ в состояние $w^h(\tau_{i+1}) = w^h(\tau_{i+1}; \tau_i, w^h(\tau_i), v^h(\cdot))$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1, 2. *Тогда*

$$\omega_2(v^h(\cdot), u(\cdot)) \le \nu(h), \tag{8}$$

где $u(\cdot)$ *— произвольная функция из множества* $U(x(\cdot))$. *Кроме того,*

$$\omega_1(v^h(\cdot), u(\cdot)) \le \nu(h) + b_2\alpha(h), \tag{9}$$

где $\nu(h) = b_1(h^2 + \varphi_1(h) + \delta(h))$, b_1 *и* b_2 *— постоянные, не зависящие от* h, $v^h(\cdot)$, $u(\cdot)$, *которые могут быть выписаны в явном виде.*

Доказательство. Пусть $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$. Оценим изменение функционала

$$\varepsilon_h(t) = \exp(-2\omega t)|w^h(t) - x(t)|_2^2 + \alpha \int_0^t \{|v^h(\tau)|_U^2 - |u(\tau)|_U^2\}\, d\tau. \tag{10}$$

При $t \in \delta_i$, $i \in [0 : m-1]$, $m = m_h$, имеют место равенства

$$w^h(t) = \mathcal{X}(t-\tau_i)w^h(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \mathcal{X}(t-\tau)\{Bv^h(\tau) + f(\tau)\}\, d\tau, \ x(t) = \mathcal{X}(t-\tau_i)x(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \mathcal{X}(t-\tau)\{Bu(\tau) + f(\tau)\}\, d\tau.$$

Поэтому при всех $i \in [0 : m-1]$ верна оценка

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \le \exp(-2\omega\tau_{i+1})|\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)(x(\tau_i)-w^h(\tau_i))|_2^2 + \lambda_i + \mu_i + \alpha \int\limits_0^{\tau_{i+1}} \{|v^h(\tau)|_U^2 - |u(\tau)|_U^2\}\, d\tau, \tag{11}$$

где

$$\lambda_i = 2\left(S_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)B\{v^h(\tau)-u(\tau)\}\, d\tau\right)_2, \quad \mu_i = k_0\delta(h)\exp(-2\omega\tau_{i+1}) \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B\{u(\tau)-v^h(\tau)\}|_2^2\, d\tau, \tag{12}$$

$$S_i = \exp(-2\omega\tau_{i+1})\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)(w^h(\tau_i)-x(\tau_i)).$$

Нетрудно видеть, что

$$\mu_i \le k_1\delta^2(h), \tag{13}$$

$$\lambda_i \le 2\exp(-2\omega\tau_{i+1})\left(\tilde{s}_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)B\{v^h(\tau)-u(\tau)\}\, d\tau\right)_2 + k_2\nu_i^h\delta(h). \tag{14}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\left(\tilde{s}_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)B\{v^h(\tau)-u(\tau)\}\, d\tau\right)_2 = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\tilde{s}_i, \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)B\{v^h(\tau)-u(\tau)\}\, d\tau)_2 = \tag{15}$$

$$= \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\mathcal{X}^*(\tau_{i+1}-\tau)\tilde{s}_i, B\{v^h(\tau)-u(\tau)\}\, d\tau)_2.$$

Учитывая правило определения управления $v^h(\cdot)$ (см. (7)), будем иметь

$$2\exp(-2\omega\tau_{i+1})\left(\tilde{s}_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)B\{v^h(\tau)-u(\tau)\}\, d\tau\right)_2 + \alpha \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|v^h(\tau)|_U^2 - |u(\tau)|_U^2\}\, d\tau \le d\nu_i^h\delta(h). \tag{16}$$

Следовательно, в силу (10)–(16), верны неравенства

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \le \varepsilon_h(\tau_i) + k_1\delta^2(h) + (k_2+d)\nu_i^h\delta(h) \le \varepsilon_h(\tau_i) + k_3\delta(h)(\nu_i^h + \delta(h)), \quad i \in [0 : m-1].$$

Таким образом, при всех $i \in [0 : m-1]$

$$\varepsilon_h(\tau_i) \le \varepsilon_h(0) + k_3\delta(h)\sum_{i=0}^{m}(\nu_i^h + \delta(h)), \tag{17}$$

где в силу (2) и условия 2 $\varepsilon_h(0) \le k_4h^2$. Из (17), снова учитывая условие 2, получаем при всех $i \in [0 : m]$

$$\varepsilon_h(\tau_i) \le b_1(h^2 + \varphi_1(h) + \delta(h)).$$

Отсюда следуют неравенства (8), (9). Утверждение теоремы доказано.

Из этой теоремы в силу теоремы 2.1 из работы [4] следует основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть также*

$$\frac{h^2 + \delta(h) + \varphi_1(h)}{\alpha(h)} \to 0 \quad \textit{при } h \to 0.$$

Тогда имеет место сходимость

$$v^h(\cdot) \to u(\cdot) \quad (u(\cdot) = u(\cdot; x(\cdot))) \quad \text{в} \quad L_2(T; U) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Пусть множество P имеет вид $P = \sum_{j=1}^N \omega_j u_j$, $\omega_j \in U$, $u_j \in R$, где $u = \{u_1, \dots, u_N) \in P_1 \subset R^N$, P_1 — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество, управление $u(\cdot)$ в правой части уравнения (1) имеет следующую структуру $u(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j u_j(t)$. В этом случае естественно выбирать управления $v^h(\cdot)$ той же структуры. Именно, вычислять по правилу

$$v^h(t) = \sum_{j=1}^N v^h_{ji}\omega_j \quad \text{при п. в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где

$$v_i^h = \{v^h_{1i}, \dots, v^h_{Ni}\}, \quad 2\sum_{j=1}^N v^h_{ji}(\mathcal{X}^*(\tau_{i+1}-\tau_i)[w^h(\tau_i) - \xi_i^h], B\omega_j)_2 + \alpha\Big|\sum_{j=1}^N v^h_{ji}\omega_j\Big|_U^2 \le$$

$$\le \min\Big\{2\sum_{j=1}^N v_j(\mathcal{X}^*(\tau_{i+1}-\tau_i)[w^h(\tau_i) - \xi_i^h], B\omega_j)_2 + \alpha\Big|\sum_{j=1}^N v_j\omega_j\Big|_U^2 : \ v = \{v_1, \dots, v_N\} \in P_1\Big\} + d\nu_i^h.$$

Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Пусть также выполнено условие*

$$\frac{\mu(\delta(h))}{\alpha(h)} \to 0 \quad \textit{при} \quad h \to 0+, \tag{18}$$

где $\mu(\delta) = \sup_{t\in[0,\delta]} \Big|\mathcal{X}(t)\sum_{j=1}^N B\omega_j - \sum_{j=1}^N B\omega_j\Big|_X$. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 2.

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$ — произвольная функция из множества $U(x(\cdot))$. Нетрудно видеть, что верно неравенство

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\xi_i^h - w^h(\tau_i)], \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)Bu(\tau)\Big)_2 - \alpha|u(\tau)|_U^2\Big\}\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\xi_i^h - w^h(\tau_i)], \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)Bv^h(s)\Big)_2 - \alpha|v^h(\tau)|_U^2\Big\}\,d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\xi_i^h - w^h(\tau_i)], Bu(\tau)\Big)_2 - \alpha|u(\tau)|_U^2\Big\}\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\xi_i^h - w^h(\tau_i)], Bv^h(\tau)\Big)_2 - \alpha|v^h(\tau)|_U^2\Big\}\,d\tau + K^{(0)}\mu(\delta)\delta, \ \delta = \delta(h),$$

где $K^{(0)} = \mathrm{const} > 0$. Следовательно, вместо неравенства (14) будем иметь

$$\lambda_i \le 2\exp(-2\omega\tau_{i+1})(\tilde{s}_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B\{v^h(\tau) - u(\tau)\}\,d\tau)_2 + K^{(1)}(\nu_i^h + \mu(\delta))\delta.$$

Поэтому, получаем (см. (17))

$$\varepsilon(\tau_i) \le \varepsilon(0) + K^{(2)}\sum_{i=0}^{m_h} \delta(h)(\nu_i^h + \delta(h) + \mu(\delta(h))),$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

При некоторых дополнительных требованиях к полугруппе $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, процедура вычисления управления $v^h(\tau)$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, в правой части уравнения (4) может быть упрощена. Перейдем к описанию этих требований. Введем

Условие 3. Полугруппа $\mathcal{X}(t)$ обладает свойством: каково бы ни было ограниченное множество $X_* \subset X$ найдутся такие числа $\delta_* \in (0,1)$ и $k_0 = k_0(X_*) \in (0,+\infty)$, при которых равномерно по всем $x \in X_*$, $\delta \in (0,\delta_*)$, $\delta_1 \in [0,\delta]$, $v(\delta_1) \in P$ п. в. на $[0,\delta]$ выполняются неравенства

$$|(\mathcal{X}(\delta)x, \mathcal{X}(\delta_1)Bv(\delta_1))_2 - (x, Bv(\delta_1))_2| \le k_0\gamma(\delta),$$

где $\gamma(\cdot) : [0,\delta_*) \to R$ — непрерывная в нуле неотрицательная функция, $\gamma(0) = 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть функция $v^h(\cdot)$ находится по правилу*

$$v^h(t) = v_i^h \quad \textit{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$\exp(-2\omega\tau_{i+1})(s_i, Bv_i^h)_2 + \alpha|v_i^h|_U^2 \le \min\{\exp(-2\omega\tau_{i+1})(s_i, Bu)_2 + \alpha|u|_U^2 : u \in P\} + d\nu_i^h. \tag{19}$$

Тогда имеет место утверждение теоремы 2, если выполнено следующее условие

$$\gamma(\delta(h))/\alpha(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{20}$$

Доказательство. Действительно, в силу условия 3 верно неравенство

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\xi_i^h - w^h(\tau_i)], \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)Bu(\tau)\Big)_2 - \alpha|u(\tau)|_U^2\Big\}\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\xi_i^h - w^h(\tau_i)], \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)Bv^h(s)\Big)_2 - \alpha|v^h(\tau)|_U^2\Big\}\, d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\Big(\xi_i^h - w^h(\tau_i), Bu(\tau)\Big)_2 - \alpha|u(\tau)|_U^2\Big\}\, d\tau - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\Big(\xi_i^h - w^h(\tau_i), Bv^h(\tau)\Big)_2 - \alpha|v^h(\tau)|_U^2\Big\}\, d\tau + K_0\gamma(\delta)\delta,$$

где $K_0 = \text{const} > 0$, $\delta = \delta(h)$. Следовательно, вместо (14) будем иметь

$$\lambda_i \le 2\exp(-2\omega\tau_{i+1})(\tilde{s}_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B\{v^h(\tau) - u(\tau)\}\, d\tau)_2 + K_1(\nu_i^h + \gamma(\delta))\delta.$$

Поэтому, учитывая (20), получаем

$$\varepsilon(\tau_i) \le \varepsilon(0) + K_2\sum_{i=0}^{m} \delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h) + \gamma(\delta_i(h))).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

3 Пример.

Рассмотрим дифференциально-функциональное уравнение уравнение

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^{l} A_i y(t-\nu_i) + \int\limits_{-\nu_l}^{0} A_*(s)y(t+s)\, ds, +B_0u(t), \quad t \in T, \tag{21}$$

с начальным условием $y(t_0) = \varphi^0$, $y(t_0+s) = \varphi^1(s)$ при п. в. $s \in [-\nu_l, 0]$. Здесь $y(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $\varphi^0 \in R^n$, $\varphi^1(\cdot) \in L_2([-\nu_l, 0]; R^n)$, $0 = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_l$, $y_t : s \to y(t+s)$, $-\nu_l \le s \le 0$, A_i и B_0 — постоянные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$, соответственно, элементы матричной функции $s \to A_*(s)$, $s \in [-\nu_l, 0]$, принадлежат пространству $L_\infty([-\nu_l, 0]; R)$, $U = R^m$.

Обозначим [9–11] $X = R^n \times L_2([-\nu_l, 0]; R^n)$ гильбертово пространство пар $x = (x^0, x^1(s))$ со скалярным произведением $(x,y)_X = (x^0, y^0)_{R^n} + \int\limits_{-\nu_l}^{0} (x^1(s), y^1(s))_{R^n}\, ds$ и нормой $|\cdot|_X$ индуцированной этим скалярным произведением.

Уравнение (21) (см. [10, 11]) порождает C_0-полугруппу линейных ограниченных операторов $\mathcal{X}(t)$, $t \geq 0$. В пространстве X скалярное произведение зададим следующим образом

$$((\varphi^0, \varphi^1(\cdot)), (\overline{\varphi}^0, \overline{\varphi}^1(\cdot)))_2 = (\varphi^0, \overline{\varphi}^0)_{R^n} + \int\limits_{-\nu_l}^{0} g(\tau)(\varphi^1(\tau), \overline{\varphi}^1(\tau))_{R^n}\, d\tau,$$

где $g(\tau) = j$ при $j \in (-\nu_{l-j+1}, -\nu_{l-j})$, $j \in [1 : l]$. В таком случае [11, лемма 2.3] эта полугруппа $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, ω-диссипативна. Причем $\omega = \dfrac{l+1}{2} + |A_0|_* + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{l} |A_i|_*^2 + \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\nu_l}^{0} |A_*(\tau)|_*^2\, d\tau$. Здесь символ $|\cdot|_*$ означает евклидову норму матрицы. Нетрудно проверить, что эта полугруппа $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию 3 при $\gamma(\delta) = \delta^{1/2}$. Кроме того, в равенстве (19) можно полагать $(s_i, Bu)_2 = (y(\tau_i) - \xi^h)' B_0 u$. Здесь штрих означает транспонирование.

References

[1] Yu.S. Osipov, A.V. Kryazhimskii. *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions.* Basel: Gordon and Breach, 1995.

[2] Yu.S. Osipov, F.P. Vasiliev, M.M. Potapov. *Fundamentals of the method of dynamic regularization.* Moscow: Izdat. MSU, 1999. (in Russian) = Ю.С. Осипов, Ф.П. Васильев, М.М. Потапов. *Основы метода динамической регуляризации.* М.: Изд-во Московского университета, 1999.

[3] Yu.S. Osipov, A.V. Kryazhimskii, V.I. Maksimov. *Methods of dynamical reconstruction of inputs of control systems.* Ekaterinburg: Izdat. IMM, 2011. (in Russian) = Ю.С. Осипов, А.В. Кряжимский, В.И. Максимов. *Методы динамической реконструкции входов управляемых систем.* Екатеринбург: Изд-во ИММ, 2011.

[4] V.I. Maksimov. *Dynamical inverse problems of distributed systems.* VSP, Boston, 2002.

[5] V.I. Maksimov, L. Pandolfi. The reconstruction of unbounded controls in non-linear dynamical systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 65(3):371–376, 2001.

[6] V.I. Maksimov. Dynamical discrepancy method in the input reconstruction problem. *Computational mathematics and mathematical physics*, 44(2):278–288, 2004.

[7] M. Blizorukova, V. Maksimov. On reconstruction of an input of a parabolic equation on an infinite time interval. *Russian Mathematics*, 58(8):24–34, 2014.

[8] V.I. Maksimov. Regularized extremal shift in problems of stable control. *In: System Modeling and Optimization.* Springer. 112–121, 2012.

[9] N.N. Krasovskii. *Stability of motion applications of Lyapunov second method to differential systems and equations with delay.* Stanford University Press, Stanford, CA, 1963.

[10] H.T. Banks, F. Kappel. Spline approximation for functional-differential equations. *J. Differ. Equat.*, 34(3):406–522, 1979.

[11] C. Bernier, A. Manitius. On semigroups in $R^n \times L^p$ corresponding to differential equations with delays. *Canad. J. Math.*, 14:897–914, 1978.